

质量作用原理作为量子力学的基本框架

顾维军

摘要

本文提出质量作用原理, 即物质粒子会受到时空中普遍存在的时空子的碰撞作用而做无规则无摩擦的布朗运动。每一次作用过程中粒子作用量的改变都是普朗克常数 h 的整数倍。物质粒子在时空子的碰撞作用下的运动是一个马尔科夫过程。物质粒子的质量属性是时空子与其碰撞所呈现出来的统计属性, 它刻画物质粒子在时空中扩散的难易程度。在质量作用原理框架下推导出量子力学的全部重要内容, 证明了质量作用原理是量子力学的起源。时空子对物质粒子的随机碰撞导致了物质粒子去毫无差错地执行一切量子力学公理, 从而时空子充当了物质粒子一切微观行为的监督者和牧者。更进一步, 本文解决了最新实验中缪子反常磁矩和标准模型理论值不符合的世界性难题, 并同时自洽解释了缪子的寿命修正。在质量作用原理框架下, 我们全面探讨了哥本哈根诠释对量子力学理论体系是不必要的, 并发现麦克斯韦的经典电磁理论不像前人所认为的不适用于微观世界。关键在于必须结合布朗运动和经典电磁理论, 才能彻底解决原子核外电子不辐射电磁波的疑难。

作者: 超天才理论物理研究所, 北京, 中国
邮箱: cj_gu@grandgeniusgroup.com

1 引言

1.1 时空涨落，时空子和质量作用原理

我们认为，时空本身的涨落是普适的。我们定义时空的能量涨落为时空子。在此图景下，粒子被分为两类：一类是与时空子有相互作用的物质粒子¹；另一类是在时空中自由穿行的无质量粒子。对于物质粒子而言，时空子会与其发生碰撞，改变粒子的瞬时运动状态。物质质量的实质是时空中的随机碰撞而呈现出来的统计性质。不同的粒子在相同的时空环境中的运动状态的改变的难易程度是不一样的。这事实上反过来定义了粒子的某种惯性属性。这种惯性属性具有质量量纲（在随后我们在由质量作用原理推导出薛定谔方程时，我们看到这种惯性属性恰恰就是粒子的统计惯性质量）。粒子在受到时空子的作用之后其运动会呈现出无规则的布朗运动。我们认为，这种随机的布朗运动就是粒子的随机性质的来源，也就是粒子的量子性的来源。在质量作用原理的框架中，光子成为 2+1 维规范场霍普夫链激发的表示及其霍奇对偶，光子不仅交换电磁相互作用，而且交换自旋的信息。这解释了正负电子对的湮灭条件，不仅是电荷相反还有自旋相反。在现代物理中，自旋和电荷是独立的物理量。然而，自旋具有磁矩导致自旋和电磁的相互作用之间互相影响。这个明显的矛盾在质量作用原理框架中自洽地解决了。

我们认为质量粒子的量子性本质上是时空涨落的结果，它的涨落本质上也是量子化的。我们把时空中涨落的能量称为时空子。时空子是无质量无自旋的标量粒子。身处时空中的粒子就自然的会受到时空子的冲击，这种冲击作用使得粒子做无规则的布朗运动。之所以不是完全随机的布朗运动，是因为每一次碰撞过程中交换的能量并不是完全任意的。假如碰撞时间确定，则碰撞所交换的能量必然是量子化的。这恰恰正是粒子所体现出来的量子性。因此我们可以说，所有的粒子都具有量子性本身就是对于时空量子涨落的一个真实反映。

¹本文中物质粒子指有质量的费米子。

物质粒子受到时空子的随机相互作用，将在时空中做随机涨落运动。在此作用过程中，能量交换不可能随时完成。对于自由物质粒子，我们定义了特征交换能量和相应的时间间隔的自由乘积作为碰撞过程中的作用量改变。（更多细节，参见附录 A）

1.2 惯性质量是一种统计属性

迄今为止，我们对质量这一个物理学根本概念的认识主要来源于牛顿第一和第二定律。物理学中定义质量是物体的一种基本属性，物体所含物质的多少叫做物体的质量。质量与物体保持原有运动状态的惯性性质相关。

牛顿第一定律：自由粒子在时空中保持静止或做匀速运动。然而根据质量作用原理，自由粒子在时空中做布朗运动，是一个马尔科夫过程。粒子的质量属性要呈现出来，必须受到时空子的随机撞击。在两次随机撞击之间，粒子的质量并没有良好的定义。也就是说质量不再是粒子恒定不变的固有属性，而是非连续的统计的，取决于时空撞击的动力学属性。质量作用原理可以自然推论，粒子的质量不是一个常数，而必须是粒子的一种统计属性，有其平均值和涨落。

更进一步的，我们论证了质量和扩散系数之间有深刻的关系，两者不能同时测准。牛顿第二定律：在惯性系中施加于粒子的外力的矢量和等于此粒子的质量与加速度的乘积。由此说明粒子质量可以作为粒子惯性的量度，牛顿第二定律定义了一个可以实验操作的测量粒子质量的根本方法。但根据质量作用原理，粒子会受到时空子的随机撞击，外力随时变化。因此我们不能再自然认为粒子质量是恒定的。作为结论，我们相信质量作为粒子的一个统计属性，在自然科学上是更为自然合理的，颠覆了从牛顿的《自然哲学的数学原理》发表三百多年以来的质量概念。

1.3 量子力学的唯物主义解释

哥本哈根诠释的核心在于不认为波函数除了抽象的概念以外有任何真实的存在。我们在本文中，并不否认哥本哈根诠释的内在一致性，即哥本

哈根量子力学是一个自洽的理论。爱因斯坦认为对于一个完备的物理理论，必须有这样的要求：完备物理理论应该包括所有的物理的实在，而不仅仅是一个概率性的描述。从唯物主义的观点，物理的实在是指所有原则上可以测量的量，如粒子的位置 q 和动量 p 。哥本哈根诠释中，把粒子的坐标波函数 $\Psi(q, t)$ 或动量波函数 $\Psi(p, t)$ 当成是对物理系统的唯一描述，这不能称之为一个完备的物理理论，最多是一个唯象有效的理论。因此在本文中，我们提出了质量作用原理，把粒子的坐标和动量当成客观的实在，无论是否观测，粒子的量子性都是客观存在的。时空赋予其中粒子马尔科夫型的随机运动，在这个背景下自然衍生出来了目前实验尺度下观测得到的量子行为，包括粒子的薛定谔方程，波恩的概率诠释，海森堡测不准原理和费曼的路径积分表述。因此，非相对论性量子力学可以在质量作用原理框架下构建。波恩规则和海森堡不确定关系在此框架下不再是基本定律。

1.4 质量作用原理框架下的光子

在质量作用原理框架下，时空子遍布于时空中，它的能谱分布和标量粒子一致。因而可以将它看作是一个标量场的激发。物质粒子对其所处的时空影响是局域的，因此在 $2+1$ 维子时空切片上，物质粒子对于时空的影响可以看作是一个势能。

在现代量子场论中，一个重要的观点是微观能量可以是非守恒的，它可以涨落而生成虚正负粒子对。在质量作用原理框架下，时空能量的涨落本身就是时空子。时空子粒子数局域上不守恒，但全局来看，时空子的能量是守恒的。所以时空子作为自由粒子的图景在大尺度上得以恢复。这恰恰说明时空子存在某种局域对称性，这种对称性在大尺度是破缺的。实质上，当局域对称性为 $U(1)$ 时，时空子就是一个复标量场的激发。

另一方面，在物质粒子所处的时空周围，时空可以看作是 $2+1$ 维的。在此 $2+1$ 维时空切片上，此时时空子是复标量场的激发，它伴随着规范场的激发。物质粒子对它所处的周围时空产生一个局域的非微扰势能，这个势能的存在可以使得时空子自发形成稳定涡旋解。如果时空子没有伴随着

规范场，那么涡旋解将会带来涡旋中心能量发散的问题。而此时规范场恰好又消除了这种局域能量发散的问题。

涡旋解的存在也提供了一种对偶性的可能，即 Hodge 对偶性。Hodge 对偶将使得 2+1 维规范场的动力学延拓到 3+1 维。在拉格朗日量的意义下，3+1 维的规范场恰好描述了电磁场理论。也就是说，3+1 维的运动方程是麦克斯韦方程。因此，我们从时空子的涡旋动力学导出了经典电磁理论。

在质量作用原理框架下，光子实质上是由两个场强互为 Hodge 对偶的 2+1 维规范场的拓扑激发态，它的拓扑构型为 Hopf 链环。物理上，光子传递物质粒子的相位变化。它的运动方程就是麦克斯韦 (Maxwell) 方程。

另一方面，光子拓扑构型-Hopf 链环的两个拓扑圈恰好对应于局域时空的拓扑子空间，所以这样的 Hopf 链环恰好表征了自旋 1 的洛伦兹表示。它是矢量表示。因此，在质量作用原理框架下，零质量粒光子的自旋为 1 也有了自洽的解释。

1.5 质量作用原理框架下的辐射问题

电子作为真实的客体，在原子中做局域性的运动，必然不能保持直线匀速运动的状态，因此具有加速度。经典电磁理论预言，有加速度的带电粒子将辐射电磁波，这和原子的稳定存在形成明显的矛盾。经典电磁理论真的在微观世界失效了吗？我们给出了否定的答案。麦克斯韦的电磁理论，在微观世界依然成立。并且只有将电磁理论和布朗运动相结合，才能证明自由电子和原子核外电子不辐射电磁波。我们在本章中将详细证明这一极为重要的结论，由此建立起微观世界的客观实在图景和量子力学的唯物主义诠释。

1.6 质量作用原理框架下的费米子自旋

在质量作用原理框架下，仔细考量时空子涡旋的奇点处的性质引领我们找到了粒子自旋的全新的观点。我们发现在时空子涡旋的奇点处，不仅仅存在奇点的能量发散，还存在方向矢量的迷向特征。由此我们引入了表征方

向迷向的余切标架场和相应的挠率张量。这样的挠率张量实际上驱动了切空间上和法空间上的 2+1 维时空子涡旋的配边拓扑相变。而正是通过这种配边的拓扑相变，我们使得切空间和法空间的时空子涡旋联结成为了 3+1 维时空的时空子瞬子。相应的代价是需要计算这种拓扑相变的拓扑序。通过配边的同调理论，我们计算了拓扑相变引起的补偿角实际上是 π 的整数倍，因而会引起物质粒子周围的时空子涡旋整体带一个 $e^{iN\pi}$ 的相因子。这样的相角在物质粒子旋转一周时，会使得物质粒子的波函数变化一个正负号。这也说明物质粒子的自旋起源于粒子周围时空子涡旋的拓扑相变。在质量作用原理框架下，粒子的自旋表征时空子涡旋的配边拓扑相变的拓扑序。

1.7 质量作用原理框架下的缪子反常磁矩

2021 年 4 月 7 日，费米国立加速器实验室有一项新的缪子反常磁矩实验，实验值与标准模型预言的理论值相差 4.2 个标准差，这种偏差来自统计涨落的概率为 1/40000。这暗示了可能存在的超越标准模型的物理学。而质量作用原理要求存在的全新无质量标量时空子，正是超越现有标准模型的关键一步。只需引入一个参数，即时空子和轻子的相互作用强度，不仅完美解释了最新实验缪子反常磁矩的世界级难题，而且同时解释了缪子的寿命偏差。由此可见，这是质量作用原理应用与现代粒子物理的一大胜利。

最后且最重要的，我们推导了带电轻子的代的数目。这是一个全新的结果，在现有量子场论框架下无法推导。而在质量作用原理框架下，代的数目是一个直接的推断。

1.8 质量作用原理框架下的熵

我们从质量作用原理出发，结合马尔可夫随机碰撞的数学性质，证明自由物质粒子系统的熵增原理。必须强调，这一原理在现代物理学中仍然是一条经验定律，无法从第一性原理出发得到证明，因此我们的证明有着深远意义。由此我们可以清楚地看出，熵增原理起源于时空子随机碰撞的

统计效应。在质量作用原理下时空子的随机碰撞，能自然产生物质粒子熵增的物理原理。这个原理为物理学的基石之一。

2 质量作用原理

2.1 质量作用原理的提出

在时空中运动的物质粒子会和时空子相互作用。时空子本身的生产应当看作是局域时空能量的微观随机激发。我们可以假设如下的两种自洽的理想时空子模型：一，时空本身是离散的，每个最小的时空单元都可以对粒子发生作用，使得粒子的运动状态发生改变。但这种时空单元对于粒子作用是一个随机力，因此身处时空的粒子在时空子的作用下的运动也将是随机的。二，时空子的能量分布遵从高斯分布，因此它和物质粒子撞击时，所产生的撞击力也是一个随机力。

进一步的，我们假设时空子和粒子每发生一次随机作用，其中所交换的作用量必然是 h 的整数倍。由此我们给出精确的质量作用原理的定义：物质粒子会受到时空中普遍存在的时空子的碰撞作用而做无规则无摩擦的布朗运动。每一次作用过程中粒子作用量的改变都是普朗克常数 h 的整数倍。物质粒子在时空子的碰撞作用下的运动是一个马尔科夫过程。

假设时空子在 t_1 时刻开始碰撞物质粒子， t_2 时刻结束碰撞，完成能量 E 的交换。若无时空子的碰撞，在此时间间隔中，粒子的作用量为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} E_0 dt \quad (2.1)$$

若发生时空子的碰撞，在此时间间隔中，粒子的作用量为

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} E(t) dt \quad (2.2)$$

那么定义一中作用量的改变定义为

$$\delta S = S' - S = \int_{t_1}^{t_2} [E(t) - E_0] dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \quad (2.3)$$

由定义可知被积函数 $f(t)$ 为单调递增函数，且有以下性质

$$f(t_1) = 0, f(t_2) = E \quad (2.4)$$

利用积分中值定理，可得积分区间内必存在一点 t^* ，使得

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = f(t^*)(t_2 - t_1) \quad (2.5)$$

设此时刻对应的交换能量为 $E^* = f(t^*)$ ，必有 $0 < E^* < E$ 。由此我们得到作用量改变的严格表达式

$$\delta S = E^* \delta t \quad (2.6)$$

其中 $\delta t \equiv t_2 - t_1$ 。这样我们就彻底澄清了，对应作用量改变的是一个特征交换能量 E^* ，并不是时空子本身携带的所有能量。结合质量作用原理 $\delta S = nh$ ，瞬时的相互作用，要求特征交换能量 E^* 达到无穷大，物理上是不可能的。

在我们的质量作用原理框架下，时空子和物质粒子之间不存在瞬时相互作用，或者说，时空子和物质粒子的碰撞作用传递能量需要时间。如果时空子和粒子的碰撞传递的能量极低，导致在碰撞时间 Δt 内粒子的作用量无法改变一个普朗克常数 h 。我们可以说在 Δt 时间内无法完成一次完整的能量传递，在这种情形下，我们认为时空子和被碰撞粒子的碰撞还在进行中。此时，时空子和被碰撞粒子处在束缚态中，而非散射态。这一点和经典物理中的非弹性碰撞是类似的。但在这种非弹性碰撞下，能量和动量不能同时守恒。所以，为了保证能量动量守恒，在时间 Δt 内，必然存在一个最小的能量 E_{min} ，即

$$E_{min} \Delta t = const. \quad (2.7)$$

物理上，能量和时间的乘积是一个具有作用量量纲的量。

普朗克假设粒子的能量是量子化的，引入了普朗克常数 h ，这个常数实际上带有作用量的量纲。换言之，量子力学中最小的作用量就是普朗克常数。本文提出质量作用原理决定最小的作用量就是 h ，因此有：

$$E_{min}\Delta t = nh \quad (2.8)$$

其中 n 是整数。

粒子在某一时刻受到很多不同能量和动量的时空子的撞击。一段时间 Δt 内，我们假定粒子受到 N 次有效撞击。那么在这段时间之后，粒子的运动将由这 N 次作用的整体效应来决定。这实际上是一个叠加的原则。我们可以用 N 个矢量来叠加出整体的状态变化。这意味着粒子在 t 时刻处在位置 $\vec{x}(t)$ ，速度为 \vec{V}_0 的话，那么它在 $t + \Delta t$ 时刻的位置将是 $\vec{x}(t + \Delta t) = \vec{X}(t) + \sum_{i=1}^N \Delta \vec{X}_i$ ，而速度则是 $\vec{V}_0 + \sum_{i=1}^N \Delta \vec{V}_i$ 。这个简单的分析告诉我们， Δt 时间内，粒子最终的运动状态可以分离为 N 个可能的不同的路径。这就是路径分离效应。这些路径所占的比重或者概率，也就是普适的扩散概率分布极大地依赖时空子的能量分布，碰撞的时空子的不同能量分布会导致粒子不同的运动状态的改变。

2.2 质量作用原理框架下的时空观

在 20 世纪初，迈克尔森-莫雷实验的零结果终结了以太理论。在质量作用原理框架下，时空子的概念看上去和以太十分类似，但其实有着根本的不同。为了澄清这一点，我们首先来回顾一下以太的概念。以太是在牛顿的绝对静态时空里到处充斥的气体介质，它的定义直接引入了一个上帝视角的参考系，就是牛顿静态时空体系。地球和这个参考系是有相对运动的，因而会感受到以太风的吹拂，这也正是迈克尔森-莫雷实验的实验基础。但时空子并不是一个绝对时空里充斥的气体介质，它就是时空的涨落。从大尺度来看，时空的涨落并不会会有显著的效应。时空看起来是光滑可微的，广义相对论的微分几何理论能够有效描述大尺度时空的物理性质。但从微观的尺度来看，时空的涨落说明时空本身不具备连续的特征。在以上的论述

中并不存在任何绝对静止时空参考系，因而质量作用原理框架下的时空子并不是以太。

迈克尔森-莫雷实验的零结果事实上促进了爱因斯坦提出相对论原理的最重要假设，即光速不变假设。在相对论的体系下，光速不变是唯一的绝对的假设，但其他所有的速度的相对性仍然保持。

在质量作用原理的框架下，时空的能量涨落形成了时空子。如果将时空看作是平静的湖面，那么时空子就是湖面上的激起的水滴，水滴落到湖面会形成涟漪。因此时空子的出现总是伴随着涟漪的传播。涟漪的传播速度就是时空中的特征传播速度。形成一个时空子就意味着在一定的时间内时空的涟漪会传播到一定的空间距离，从而这个时空子的周围的时空也被改变。我们现在知道，时间的最小尺度是普朗克尺度，而空间的最小尺度是普朗克长度。所以在普朗克时间内时空子要传播一个普朗克长度的空间，也即时空子传播的速度是光速。

从质量作用原理下的时空观来看，时空中发生的任何一件物理上可观测的事件，必然会伴随着时空能量的涨落，也就深刻的影响了该事件发生之后的时空。这样的时空观下，当前的时空实际上是过去时空所有事件的结果。

2.3 时空子的能谱

为了理解时空子和物质粒子的碰撞效应，我们需要首先理解时空子的能谱。

考虑时空中体积为 L^3 的立方体，我们称之为一个系统。设空间中总共有 N 个系统。处在状态 j 的系统数目设为 N_j 个。空间的总能量为 \mathcal{E} ，状态 j 对应的能量为 E_j 。由此可知

$$N = \sum_j N_j \quad (2.9)$$

$$\mathcal{E} = \sum_j N_j E_j \quad (2.10)$$

给定 \mathcal{E} 和 N , 全空间的可能状态数为 $\Omega = \frac{N!}{\prod_j N_j!}$ 。 Ω 的最大值将对应物理分布。为了实现概率最大, 下面将求出分布 $\{N_j\}$ 使得 Ω 最大, 即使下式取极大值

$$\ln \Omega = N \ln N - N - \sum_j N_j \ln N_j + \sum_j N_j \cdots \quad (2.11)$$

问题转化为在约束条件 (2.9, 2.10) 式下, 求 (2.11) 的极大值的条件。

运用拉格朗日乘子法,

$$\frac{\partial \ln \Omega}{\partial N_j} - \lambda_1 \frac{\partial \sum_j N_j}{\partial N_j} - \lambda_2 \frac{\partial (\sum_j N_j E_j)}{\partial N_j} = 0 \quad (2.12)$$

我们可以导出

$$\begin{aligned} -\ln N_j - \lambda_1 - \lambda_2 E_j &= 1 \Rightarrow \\ N_j &= e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 E_j} \end{aligned} \quad (2.13)$$

那么处在状态 j 的概率为

$$P_j = \frac{N_j}{N} = \frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2 E_j}}{\sum_j e^{-\lambda_1-\lambda_2 E_j}} = \frac{e^{-\lambda_2 E_j}}{\sum_j e^{-\lambda_2 E_j}} \equiv \frac{e^{-\lambda_2 E_j}}{\mathcal{Z}} \quad (2.14)$$

系统的平均能量为

$$E = \frac{\mathcal{E}}{N} = \sum_j E_j P_j = -\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \ln \mathcal{Z} \quad (2.15)$$

在 L^3 之中, 设动量为 \vec{p} 的时空子的数目为 $n_{\vec{p}} = 0, 1, 2, \dots$, 给定 $\{n_{\vec{p}}\}$ 的分布, 就确定了 L^3 中的能量为

$$E = \sum_{\{n_{\vec{p}}\}} n_{\vec{p}} E_{\vec{p}} \quad (2.16)$$

其中 $E_{\vec{p}} = c|\vec{p}| = cp$, 这里我们假设时空子无质量。于是我们有

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{n_{\vec{p}}\}} e^{-\lambda_2 E} = \prod_{\vec{p}} (1 + e^{-c\lambda_2 p} + e^{-2c\lambda_2 p} + \dots) = \prod_{\vec{p}} \frac{1}{1 - e^{-c\lambda_2 p}} \quad (2.17)$$

则系统的平均能量为

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \ln \mathcal{Z} = \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \sum_{\vec{p}} \ln(1 - e^{-c\lambda_2 p}) \\ &= \sum_{\vec{p}} \frac{cpe^{-c\lambda_2 p}}{1 - e^{-c\lambda_2 p}} = \sum_{\vec{p}} \frac{cp}{e^{c\lambda_2 p} - 1} \end{aligned} \quad (2.18)$$

当 $L \rightarrow \infty$, 求和对应于积分

$$\sum_{\vec{p}} \rightarrow \frac{L^3}{8\pi^3} \int d^3\vec{p}$$

由此我们知道

$$E = \frac{L^3}{2\pi^2} \int dp \frac{p^3}{e^{c\lambda_2 p} - 1} = \frac{\pi^2 L^3}{30\lambda_2^4} \quad (2.19)$$

即时空子的平均能量密度为

$$\epsilon_{ST} = \frac{\pi^2}{30\lambda_2^4} \quad (2.20)$$

在国际单位制下, 我们恢复上式中 c 和 \hbar 的依赖, 得到

$$\epsilon_{ST} = \frac{\pi^2}{30c^3\hbar^3\lambda_2^4}. \quad (2.21)$$

下面我们考虑拉格朗日乘子 λ_2 的物理意义。它决定时空子的能量分布。另一方面, 决定时空子数分布的乘子 λ_1 对于时空子的动力学没有任何影响。这表明可以将时空子系统任意组合分类, 只要它们满足 λ_2 乘子所对应的能量约束。这表明, 在粒子受到时空子的一次撞击作用下, 假如粒子的作用量改变了 kh , k 为整数时, 在物理上并不能区分粒子是受到了一个时空子还是多个时空子的撞击。因为无论是从时空子的能谱分布或者粒子状态的改变来看, 都无法区分这些不同时空子数目的撞击。

在质量作用原理的图景中以及量纲分析

$$\lambda_2 = \frac{g}{E_{ST}} \quad (2.22)$$

其中 g 为时空作用的无量纲的常数, E_{ST} 为时空子的特征能量。在极端相对论的情形下, 时空子的作用不能看作是微扰, 而应该是强扰动。

3 随机运动和时空扩散系数

假定 m_{ST} 为粒子统计惯性质量，我们将证明统计惯性质量 m_{ST} 的粒子的时空扩散系数 \mathfrak{K} 由普适公式

$$\mathfrak{K} = \frac{h}{2m_{ST}} \quad (3.1)$$

给出。在随机运动的理论 [1]，即数学上的维纳过程 [2] 的框架下，时空诱导的随机运动是一个马尔科夫过程并且时空扩散系数的意义就是粒子做随机运动的扩散系数 [3]。在本节中，我们先从随机运动的概率论 [3, 4] 出发，证明粒子的随机运动在质量作用原理下的普适扩散系数的确如 (3.1) 一样。本节的后面两部分讨论了从两个时空模型来指明此时空扩散系数的起源。本节研究的两个模型均得到 $\mathfrak{K} = \frac{w\ell}{2}$ ，其中 w 为粒子的平均速度， ℓ 为粒子的平均自由程。

3.1 朗之万方程

时空背景可以看作是一个涨落环境，而粒子则是在此涨落环境下运动，这是一个马尔科夫过程。粒子的位置 \vec{q} 是一个随机量，从严格的数学意义上来看，它可以被分解为完全随机部分和一个可微函数的叠加，即

$$\vec{q}(t) = \vec{q}_0(t) + \vec{w}(t) \quad (3.2)$$

其中 $\vec{q}_0(t)$ 是位置的可微部分，而 $w(t)$ 则表征了粒子的随机运动。粒子的运动可以用朗之万方程

[5] 来描述：

$$\frac{\delta q_i(t)}{\delta t} = \frac{dq_{0,i}(t)}{dt} + \frac{\delta w_i(t)}{\delta t} \Big|_{\delta t \rightarrow 0} = U_i(\mathbf{q}(t)) + v_i(t) \quad (3.3)$$

粒子运动速度

在时空中，粒子受到时空子的撞击作用。但是如果某些撞击作用相对而言特别轻微。那么它们对于粒子运动状态的改变就只能算作是一个微扰。

在微扰下，粒子的速度会发生改变，但是这种改变可以看作是光滑连续的。而时空子对于粒子的非微扰的撞击作用则会瞬时改变粒子的运动状态，导致完全随机的运动。每次撞击都应该看作是可微的撞击和随机的撞击两部分。可微的撞击不会改变粒子的经典运动轨迹，但是它会使得经典运动的轨迹叠加上一个包络的运动。这恰恰是朗之万方程的速度分解中的第一项所表述的“可微的速度函数” $\mathbf{U}(\mathbf{q}(t))$ 。因此，粒子的真实速度 $\mathbf{V}(t)$ 应该包含有三个部分的贡献，即

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(\mathbf{q}(t)) + \vec{v}(t) \quad (3.4)$$

其中 $\mathbf{v}(t)$ 为粒子的经典统计速度。而 $\mathbf{u}(\mathbf{q}(t))$ 则是粒子的量子包络运动。 $\vec{v}(t)$ 则是代表随机运动的扩散速度。 $\mathbf{U}(\mathbf{q}(t))$ 标记 (3.4) 中的前两项贡献和

$$\mathbf{U}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(\mathbf{q}(t)) \quad (3.5)$$

对于一个马尔科夫过程，时空子噪声本身的平均贡献是零，但是由于它是一个高斯型的分布，所以其协方差并不为零。也即

$$\langle v_i \rangle_v = 0, \quad \langle v_i(t)v_j(t') \rangle_v = \Omega \delta_{ij} \delta(t - t'), \quad t \geq t' \quad (3.6)$$

后面的式子中的 δ_{ij} 可以从空间各项同性得到，而 $\delta(t - t')$ 则是马尔科夫过程所要求的，即此时此刻的涨落环境决定此时此刻的动力学，任何过去或者将来的环境信息都与此时此刻的动力学无关。

由此我们可以将这种平均值用一个概率积分测度 $[d\rho(v)]$ 来写下，此测度为：

$$[d\rho(v)] := \left(\sqrt{\frac{t-t'}{2\pi\Omega}} \right)^D [dv] \exp\left(-\frac{1}{2\Omega} \int dt \sum_i v_i^2\right) \quad (3.7)$$

容易看出

$$\langle v_i(t) \rangle_v \equiv \int v_i(t) [d\rho(v)] = 0 \quad (3.8)$$

$$\langle v_i(t)v_j(t') \rangle_v \equiv \int v_i(t)v_j(t') [d\rho(v)] = \Omega \delta_{ij} \delta(t - t') \quad (3.9)$$

注意 $\delta(t - t')$ 函数实际上具有与时间 t 相反的量纲，因为

$$\int_0^{\infty} \delta(t - t') dt = 1.$$

Ω 表征时空对于粒子的作用强度。但是它并非是一个不带单位的常数。从测度的定义 (3.7) 可以知道, v_i 具有速度的单位 m/s , 因此容易看出 Ω 的单位必须是: m^2/s 。由质量作用原理可知, 每次时空子和粒子的作用会至少改变一个 h 的作用量。 h 具有角动量的单位: $kg \cdot m^2/s$, 由此我们可以定义一个带质量单位的量 m_{ST}

$$m_{ST} \equiv \frac{h}{\Omega} \quad (3.10)$$

这样定义下来的质量 m_{ST} 就具有如下的意义: 它是粒子在时空中时空子碰撞呈现出来的统计性质。相应的, 时空对于粒子的作用参数 $\Omega = \frac{h}{m_{ST}}$ 。这是符合物理实在论的, 因为明显的, 质量越大的客体, 量子效应越不明显。

朗之万方程生成了一个时间依赖的概率分布

$$\mathbf{P}[\mathbf{q}, t; \mathbf{q}', t'] = \langle \prod_{i=1}^D \delta[q_i(t) - q'_i(t')] \rangle_v, \quad t \geq t' \quad (3.11)$$

这个概率分布的意义在于, 如果存在一个算子 $O[\mathbf{q}]$, 其在 t 时刻的平均值为

$$\langle O[\mathbf{q}(t)] \rangle_v \equiv \int \mathbf{P}[\mathbf{q}, t; \mathbf{q}', t'] O[\mathbf{q}] d\mathbf{q}' \quad (3.12)$$

利用分布 (3.11), 可以很快验证方程 (3.12) 的正确性。实际上概率分布 (3.11) 可以看作是一个演化过程, 即

$$\mathbf{P}[\mathbf{q}, t; \mathbf{q}', t'] = \iint q(t) e^{-(t-t')H(p,q)} q'(t') d^D p \quad (3.13)$$

这里的演化哈密顿量就是福克-普朗克哈密顿量。我们将在下面推导它的形式。

3.2 福克-普朗克方程

有了朗之万方程 (3.3), 就可以进一步推导其对应的福克-普朗克方程, 以及对应的福克-普朗克哈密顿量 [3].

考虑从时间 t 到 $t + \epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$ 的过程, 此时朗之万方程可以写为:

$$q_i(t + \epsilon) - q_i(t) = \epsilon U_i(\mathbf{q}(t)) + \int_t^{t+\epsilon} v_i(\tau) d\tau + O(\epsilon^2) \quad (3.14)$$

相应的概率分布

$$\mathbf{P}[\mathbf{q}, t + \epsilon; \mathbf{q}', t] = \langle \delta(\mathbf{q}(t + \epsilon) - \mathbf{q}'(t)) \rangle_v \quad (3.15)$$

由质量作用原理可知, 每次时空子和粒子的作用会改变一个 nh 的作用量。为了得到福克-普朗克方程, 需要把朗之万方程做离散化。定义:

$$\bar{v}_i \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_t^{t+\epsilon} v_i(\tau) d\tau \quad (3.16)$$

$$q_i(t + \epsilon) - q_i(t) = \epsilon U_i(\mathbf{q}(t)) + \sqrt{\epsilon} \bar{v}_i + O(\epsilon^2) \quad (3.17)$$

此时时间被离散化为:

$$(t - t')/\epsilon \in \mathbb{Z}^+$$

\mathbb{Z}^+ 为正整数。

此时高斯分布和马尔科夫过程的性质决定离散涨落 v_i 的平均值:

$$\langle \bar{v}_i \rangle_v = 0, \quad \langle \bar{v}_i \bar{v}_j \rangle_v = \frac{h}{m_{ST}} \delta_{ij} \delta_{t,t'} \quad (3.18)$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 概率分布 (3.15) 是在位置空间定义的, 相应的动量空间中的

概率分布可以经由对其做傅里叶变换得到：

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{P}}[\mathbf{p}, t; \mathbf{q}', t']|_{t=t'+\epsilon} &= \int e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}} \mathbf{P}[\mathbf{q}, t; \mathbf{q}', t'] d^D \mathbf{q}|_{t=t'+\epsilon} \\
&= \langle e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}'(t-\epsilon)} \rangle_v \\
&= \langle e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{q}'(t)-\epsilon \frac{\delta \mathbf{q}'(t)}{\delta t} - O(\epsilon^2))} \rangle_v \\
&= \langle \exp(-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{q}'(t) - \epsilon \mathbf{U}(\mathbf{q}')))) \rangle_v \\
&\quad \times \left\langle \exp \left[+i\mathbf{p}\cdot \int_{t-\epsilon}^t v(\tau) d\tau \right] \right\rangle_v \times \langle \exp(O(\epsilon^2)) \rangle_v \\
&= \exp[-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{q}' - \epsilon \mathbf{U}(\mathbf{q}'))] \\
&\quad \times \left\langle \exp \left[+i\mathbf{p}\cdot \int_{t-\epsilon}^t v(\tau) d\tau \right] \right\rangle_v \tag{3.19}
\end{aligned}$$

注意到上式中的最后的平均值实际上是可以被高斯积分积出来的，

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{\frac{h}{2\pi}} \right)^D \int [dv] \exp \left(-\frac{m_{ST}}{2h} \int dt \sum_i v_i^2 \right) \exp \left[+i\mathbf{p}\cdot \int_{t-\epsilon}^t v(\tau) d\tau \right] \\
&= \left(\sqrt{\frac{h}{2\pi}} \right)^D \int [dv] \exp \left(-\frac{m_{ST}}{2h} \int dt \sum_i v_i^2 + i\mathbf{p}\cdot \int_{t-\epsilon}^t v(\tau) d\tau \right) \\
&= \left(\sqrt{\frac{h}{2\pi}} \right)^D \int [dv] \exp \left(-\frac{m_{ST}}{2h} \int dt \sum_i v_i^2 + i\sqrt{\epsilon} \mathbf{p}\cdot \bar{v} \right) \\
&\quad \times \exp \left(-\epsilon \frac{h}{2m_{ST}} \mathbf{p}\cdot \mathbf{p} + \epsilon \frac{h}{2m_{ST}} \mathbf{p}\cdot \mathbf{p} \right) \\
&= \left(\sqrt{\frac{h}{2\pi}} \right)^D \int [d^D \left(-v_i - \frac{ih}{2m_{ST}} \sqrt{\epsilon} p_i \right)] \\
&\quad \times \exp \left(-\frac{m_{ST}}{2h} \int dt \sum_{i=1}^D \left(v_i + \sqrt{\epsilon} \frac{ih}{2m_{ST}} p_i \right)^2 - \epsilon \frac{h}{2m_{ST}} \mathbf{p}\cdot \mathbf{p} \right) \\
&= \exp(-\epsilon h \mathbf{p}\cdot \mathbf{p} / (2m_{ST})) \tag{3.20}
\end{aligned}$$

而傅里叶变换后的概率分布：

$$\tilde{\mathbf{P}}[\mathbf{p}, t; \mathbf{q}', t']|_{t=t'+\epsilon} = e^{-\epsilon h / (2m_{ST}) \mathbf{p}\cdot \mathbf{p} + i\epsilon \mathbf{p}\cdot \mathbf{U}(\mathbf{q}') - i\mathbf{p}\cdot \mathbf{q}'}$$

$\epsilon \rightarrow 0$, 展开上式得到:

$$\tilde{P}[\mathbf{p}, t; \mathbf{q}', t']|_{t=t'+\epsilon} = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}'}(1 - \epsilon H_{FP}(\mathbf{p}, \mathbf{q}') + O(\epsilon^2)), \quad (3.21)$$

最后就可以写下一个福克-普朗克哈密顿量

$$H_{FP}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\hbar}{2m_{ST}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{q}) \quad (3.22)$$

由此, 由时空子对粒子的作用, 造成粒子做布朗运动的扩散系数就是 $\hbar/2m_{ST}$, 本文称这种由时空子碰撞所造成的扩散系数为时空扩散系数, 用 \mathfrak{K} 表示。而随后在导出薛定谔方程的时候, 可以清楚的看到这里我们定义的统计惯性质量 m_{ST} 正比于牛顿力学体系的惯性质量 m , 准确的说 $m_{ST} = 2\pi m$ 。

3.3 从时空散射到时空扩散系数

3.3.1 从时空离散化到时空扩散系数

我们从质量作用原理出发, 根据理想时空结构模型, 给出时空扩散系数的起源。由于微观时空是离散化的, 那么时空扩散系数, $\mathfrak{K} = \frac{\hbar}{2m_{ST}}$, 必然就可以由离散时空的基本参数得以表达。为此, 我们先考虑一个最简单的离散模型, 即一维离散空间 (如图 1)。

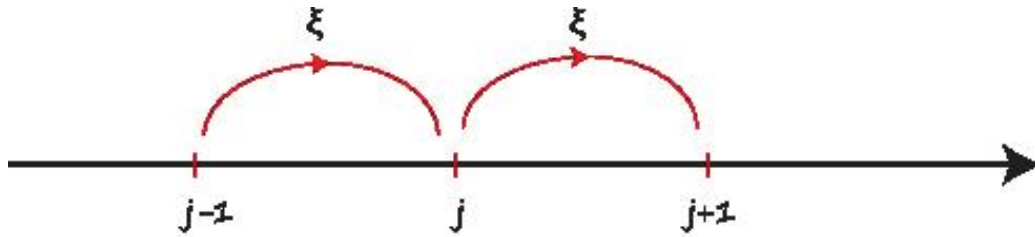


图 1: 一维离散空间随机跃迁模型

离散空间的相邻格点距离, 即空间的基本长度单位设为 ℓ , 在 t 时刻粒子处在第 j 个格点的概率为 $P(j, t)$. 设相邻格点的跃迁速率为 ζ , 因为空间本身的离散性质, 所有的跃迁只能在最近邻格点发生。再考虑到空间的各向同性, 以及不存在任何摩擦力, 对所有方向的跃迁速率都相等为 ζ , 每一

方向的前后跃迁概率也必须相等为。那么粒子在离散空间里面的概率演化必须满足

$$\partial_t P(j, t) = \zeta \left(\frac{1}{2} P(j-1, t) + \frac{1}{2} P(j+1, t) - P(j, t) \right) \quad (3.23)$$

方程右边的前两项表示各有二分之一的概率从 $j-1$ 和 $j+1$ 个格点跃迁到第 j 个格点，第三项表示从第 j 个格点跃迁到最近邻格点。引入空间的基本长度单位 ℓ ，方程 (3.23) 可以化为

$$\partial_t P(j, t) = \frac{\zeta \ell^2}{2} \left(\frac{P(j+1, t) - P(j, t)}{\ell} - \frac{P(j, t) - P(j-1, t)}{\ell} \right) \quad (3.24)$$

在时空连续的近似下面，空间的基本长度单位 ℓ 趋于零，跃迁速率 ζ 趋于无穷大，保持 $\zeta \ell^2$ 不变，概率 $P(j, t)$ 将成为概率密度 $\rho(x, t)$ ，等式右边的括号里面为二阶导数的定义。因此

$$\partial_t \rho(x, t) = \frac{\zeta \ell^2}{2} \partial_x^2 \rho(x, t) \quad (3.25)$$

上式可以直接推广到三维的情形，简单地

$$\partial_t \rho(\vec{r}, t) = \frac{\zeta \ell^2}{2} \nabla^2 \rho(\vec{r}, t) \quad (3.26)$$

对比爱因斯坦的扩散方程 [6]

$$\partial_t \rho(\vec{r}, t) = \mathfrak{K} \nabla^2 \rho(\vec{r}, t) \quad (3.27)$$

可以得到时空扩散系数（也就是上文所说的时空子对粒子作用所造成的扩散系数）的微观起源

$$\mathfrak{K} = \frac{\zeta \ell^2}{2} \quad (3.28)$$

进一步的，把时间也离散化，基本的时间单位为 $\tau = \frac{\ell}{w}$ ，其中 w 为粒子的平均运动速度。跃迁速率反比于时间单位 $\zeta = \frac{1}{\tau}$ ，可以得到

$$\mathfrak{K} = \frac{w \ell}{2} \quad (3.29)$$

结合离散空间的微观结构和质量作用原理，立刻得到，

$$\mathfrak{K} = \frac{w \ell}{2} = \frac{h}{2m_{ST}} \quad (3.30)$$

这正是我们需要的时空扩散系数。

3.3.2 从时空散射到时空扩散系数

粒子在时空中受到以光速运动的时空子的散射作用，导致粒子的速度 \vec{v} 有一个概率分布 $f(\vec{v})$ ，即速度落在 \vec{v} 和 $\vec{v} + d\vec{v}$ 之间的粒子数为 $f(\vec{v})d^3\vec{v}$ 。那么在 dt 时间内穿过 dA 面积的粒子，必将落在无限小的圆柱体之内（如图 2）。

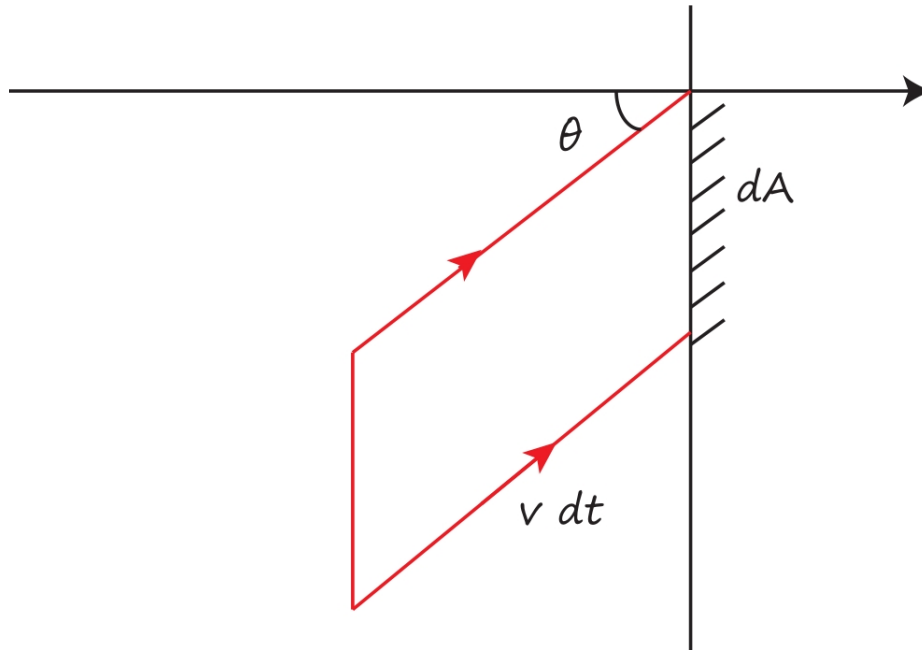


图 2: 时空散射的概率分布

此无限小的圆柱体的体积将为

$$V = v dt \cos \theta dA \quad (3.31)$$

在此圆柱体内的粒子数为

$$N = f(\vec{v}) d^3\vec{v} v dt \cos \theta dA \quad (3.32)$$

因为空间各向同性，我们有 $f(\vec{v}) = f(v)$ 。由此可以得到单位时间从左往右穿

过单位面积的粒子数为

$$\Phi = \int_{v_z > 0} \frac{N}{dAdt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos \theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} f(v) v^3 dv = \pi \int_0^{+\infty} f(v) v^3 dv \quad (3.33)$$

其中 $v_z > 0$ 的积分区域相当于 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 。粒子的统计平均速度大小为

$$w = \frac{\int_0^{+\infty} f(v) v d^3v}{\int_0^{+\infty} f(v) d^3v} = \frac{4\pi}{\rho} \int_0^{+\infty} f(v) v^3 dv \quad (3.34)$$

其中 $\rho = \int_0^{+\infty} f(v) d^3v$ 为粒子数的密度。由此，粒子在时空中受到时空散射，单位时间从左往右穿过单位面积的粒子数为

$$\Phi = \frac{1}{4} \rho w \quad (3.35)$$

设粒子在时空中的平均自由程为 ℓ ，即受到两次时空散射之间的平均运动距离。考虑通过 z 的垂直平面的净通量 J_z ，即单位时间通过单位面积的粒子数（如图 3）

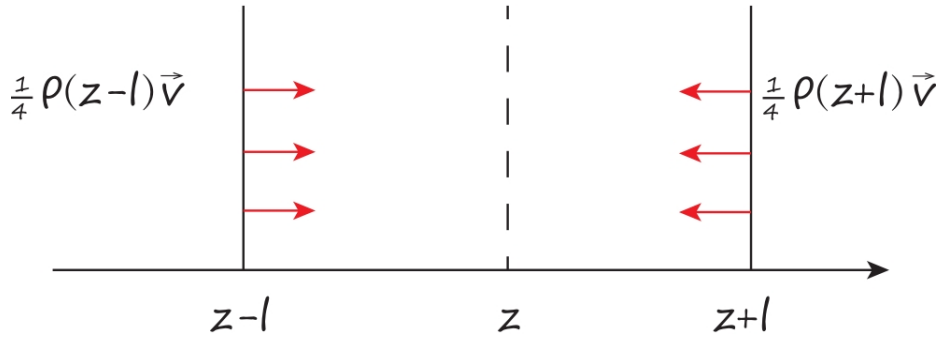


图 3: 平均自由程和散射通量

我们有

$$J_z = \frac{1}{4} \rho(z-l) w - \frac{1}{4} \rho(z+l) w = -\frac{1}{2} \ell w \partial_z \rho \quad (3.36)$$

由连续性方程（粒子数守恒方程）

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (3.37)$$

及空间各向同性，可知

$$\partial_t \rho = \frac{1}{2} \ell w \nabla^2 \rho \quad (3.38)$$

一方面从散射过程的运动学导出时空扩散系数，另一方面结合时空诱导出来粒子的量子本性，即有

$$\mathfrak{K} = \frac{w \ell}{2} = \frac{h}{2m_{ST}} \quad (3.39)$$

对照方程 (3.30) 和 (3.39) 可以看出，这两个模型的结果完全一致 [7, 8]。

3.4 基本粒子的统计质量

对于电子而言，其质量为 $m_e = 9.104 \times 10^{-31} \text{kg}$ ，因此其静能量为

$$E_e = m_e c^2 = 9.104 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{18} \text{J} = 8.1936 \times 10^{-12} \text{J}$$

而这么多静能量来自于时空子的有效撞击。电子在我们的理论中并非是一个严格的点粒子，它在时空子的撞击之下有一个统计的尺度大小。由于对称性，其表现为一个球形。有效撞击就可以看成是进入和离开这个球的表面的时空子的个数。假定时空子每次撞击只赋予 1 个普朗克常数的能量。那么有效撞击的次数为

$$N_e = E_e / h = 1.2347 \times 10^{20} [\text{s}^{-1}]$$

那么对于电子而言，其统计质量和有效撞击次数之间的关系就可以表达为

$$m_e = \frac{h}{c^2} N_e \quad (3.40)$$

即质量和时空子撞击次数的比例常数

$$k_{st} \equiv \frac{h}{c^2} = 7.37 \times 10^{-51} \text{kg} \cdot \text{s} \quad (3.41)$$

它具有 $[\text{mass}] \cdot [\text{time}]$ 的单位。那么在电子周围的时空子的密度的涨落值 $\Delta \rho_{st}^e$ 就可以写为

$$\Delta \rho_{st}^e \equiv \rho^e - \rho_0 = \frac{m_e c^2}{\frac{4}{3} \pi r^3 h} \quad (3.42)$$

对于质子而言，容易计算出

$$N_p = \frac{m_p}{k_{st}} = 1.6726 \times 10^{-27} / 7.37 \times 10^{-51} \simeq 2.227 \times 10^{23} [\text{s}^{-1}] \quad (3.43)$$

对于质子而言，其半径为

$$r_p \simeq 8.735 \times 10^{-16} m \quad (3.44)$$

由此得到，在时空子的海洋中，质子的自由程为

$$l_{st} = \sqrt[3]{\frac{4}{3} \pi r_p^3 / N_p} \simeq 2.3 \times 10^{-23} m$$

3.5 质量作用原理框架下的动量和能量

物理学研究的时间尺度跨越很多个数量级。宇宙学研究宇宙的年龄，约在 4×10^{17} 秒。牛顿力学研究宏观物体的低速运动，时间尺度通常在秒的数量级。量子力学的基本系统为氢原子，当氢原子核外电子处于基态的时候，电子绕原子核运动一周需要约 1.5×10^{-15} 秒。氢原子的第一激发态跃迁到基态发出的光，波长为 121 纳米，对应的时间周期为 4×10^{-16} 秒。现代物理学认为，同时考虑广义相对论、狭义相对论和量子力学的基本原理，最小的物理时间尺度是普朗克时间约为 5×10^{-44} 秒，这是最小的可测时间间隔。按照当今学术界所了解的物理定律，在这短暂时间间隔里所发生的任何变化，是无法测量或探测求得。

在质量作用原理框架下，一秒之内时空子撞击电子的平均次数为 10^{20} 次。也就是说，本文中由质量作用原理推导出来的理论，所探讨的典型时间尺度在 10^{-20} 秒。同样对于电子来说，这个时间尺度比量子力学要短一万倍²。因此量子力学中的能量守恒和动量守恒，不是瞬时的守恒定律，而是质量作用原理框架下的统计平均守恒。下面我们定义的动量和能量，就是把时空子的随机撞击效应取统计平均之后的结果。

²在粒子物理领域，寿命短的如希格斯玻色子寿命约为 1.5×10^{-22} 秒。同样对于希格斯玻色子来说，一秒之内时空子撞击希格斯粒子的平均次数为 10^{25} 次。其典型时间尺度比量子场论要小一千倍。

在 10^{-20} 秒的时间间隔内，我们称粒子³具有的动量为瞬时动量。根据质量作用原理，瞬时动量定义为

$$\vec{P}_i = m_i \vec{V} \quad (3.45)$$

其中 m_i 为 10^{-20} 秒的时间间隔内粒子的质量，我们称为瞬时质量。 \vec{V} 为粒子的真实速度

$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{v}' \quad (3.46)$$

同理我们定义粒子的瞬时动能为

$$E_i = \frac{1}{2} m_i V^2 \quad (3.47)$$

现代物理实验观察到的质量，是粒子的统计质量，是在大于 $\times 10^{-16}$ 秒的时间间隔里的惯性属性。现代物理实验观察到的动量，是量子力学理论预言的动量。而量子力学动量正是瞬时动量的统计平均，我们称为统计动量：

$$\vec{P}_s = \langle \vec{P}_i \rangle = \frac{m_{st}}{2\pi} \langle \vec{v} + \vec{u} \rangle \quad (3.48)$$

由此我们将小时间尺度的瞬时动量和大时间尺度的量子力学动量联系起来。有一个重要的观察，我们在第五章证明了，任何定态（基态是能量最低的定态）的经典统计速度为 $\vec{v} = 0$ ，而氢原子基态电子的量子包络速度

$$\vec{u} = -c\alpha\hat{r} \quad (3.49)$$

其中 α 是精细结构常数。

对比量子力学的结果：氢原子基态电子的动量必须为零，满足各向同性的波函数。微妙的是，量子包络速度不贡献基态电子的动量，因为各向同性相互抵消 $\langle \vec{u} \rangle = 0$ 。因为量子力学是在大时间尺度下统计平均三个速度和瞬时质量的综合结果，故由此定义的 \vec{P}_s 与量子力学计算得到的动量相一致。

³下面的讨论中，粒子都特指电子，为物质粒子的代表。

现代物理实验观察到的动能，是量子力学理论预言的动能。量子力学动能是瞬时动能的统计平均，我们称为统计动能

$$E_s = \langle E_i \rangle = \frac{m_{st}}{4\pi} \langle V^2 \rangle \quad (3.50)$$

其中量子包络速度会贡献基态电子的动能 (恒为正数，不会抵消)。所以，基态电子的能量有两部分 (经典统计速度恒为 0，不贡献基态动能)

氢原子基态电子能量 = 量子包络动能 + 库伦势能

计算得到的结果，恰好为-13.6ev，也与量子力学计算得到的能量相一致。其中量子包络动能定义为

$$E_c = \frac{1}{4\pi} m_{st} u^2 \quad (3.51)$$

代入得到氢原子基态电子能量的数值

$$E = \frac{m_{st}}{4\pi} \langle (\alpha c)^2 \rangle + \langle -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} a \rangle = -13.6ev \quad (3.52)$$

其中 a 是氢原子的波尔半径， ϵ_0 是真空介电常数， α 是精细结构常数。

由此，我们得到了与量子力学相一致的动量和动能定义。

更普遍的，对于任意量子态的统计动量和量子力学动量等价性，证明如下。根据量子力学的埃伦费斯特定理，粒子位置的平均值随时间演化满足

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{x} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\vec{x}, H] \rangle = \frac{1}{i2m\hbar} \langle [\vec{x}, p^2] \rangle = \frac{1}{i2m\hbar} \langle \vec{x}pp - pp\vec{x} \rangle \quad (3.53)$$

结合 $\vec{x}pp - pp\vec{x} = i2\hbar\vec{p}$ 可得

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{x} \rangle = \frac{1}{m} \langle \vec{p} \rangle \quad (3.54)$$

这是非常重要的结果，表明量子力学的动量平均值如何与坐标平均值相联系。在质量作用原理框架下，根据公式 (3.3)，坐标对时间的导数定义为

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = \vec{u} + \vec{v} \quad (3.55)$$

对等式两边取平均，故量子力学的动量平均值对应到质量作用原理的统计动量

$$\vec{P}_s = \langle \vec{P}_i \rangle = \frac{m_{st}}{2\pi} \langle \vec{v} + \vec{u} \rangle \quad (3.56)$$

由此证明了，量子力学的微观理论基础，正是质量作用原理。

4 质量-扩散系数不确定关系

我们考虑质量作用原理对粒子运动状态描述的影响。哥本哈根诠释下的量子力学中最重要的假设是粒子的波粒二象性，这实际上说明描述粒子的状态可以用平面波来叠加，而相空间上的平面波用因子 $\exp(ip \cdot x/\hbar)$ 来刻画。这实际上就引入了量子化的算符形式 $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ 。由于波粒二象性，粒子的物理量也必须能够从波函数来推导出来，而某些物理量在相空间中就可以用对应的算符的本征值来描述。然而，在质量作用原理框架下，我们需要强调，粒子的波动性是由于时空子碰撞而赋予的，并不是一个本质的属性。因此不能简单的借用这种量子化假设。在质量作用原理框架下，我们考虑粒子的作用量

$$S[\phi(t, x), \partial\phi(t, x), \bar{v}(t, x)] = S_0[\phi(t, x), \partial\phi(t, x)] + \sum_{I=1}^{\infty} S_I[\bar{v}(t, x)] \quad (4.1)$$

其中 $\phi(t, x)$ 描述粒子运动的经典轨迹， S_0 是不考虑粒子在时空子撞击作用下的经典作用量，它描述牛顿力学体系下的运动。而 $S_I[\bar{v}(t, x)]$ 则是第 I 次时空子撞击粒子所引起的布朗运动的作用量的改变。它完全不依赖于经典的路径，仅仅只依赖于时空子的涨落环境。质量作用原理告诉我们它必然是 h 的整数倍，即 $S_I = nh$ 。

粒子的统计配分函数为

$$Z = \int [d\phi(t, x)] \exp\left(-\frac{i}{\hbar} S[\phi(t, x), \partial\phi(t, x), \bar{v}(t, x)]\right) \quad (4.2)$$

于是，

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} S_I[\bar{v}]\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} nh\right) = e^{-i2\pi n} = 1 \quad (4.3)$$

由此我们可以看出质量作用原理的引入并不会改变粒子的经典运动。

4.1 质量-扩散系数不确定关系

我们已经指出并证明，质量是刻画粒子在时空中扩散的难易程度的属性。但是这只能说明在时空子的连续作用下，质量和时空扩散系数本身是统计得到的属性。质量作用原理是一种特殊的马尔科夫过程，它具有一种非常重要的特征，也就是这种马尔科夫过程本质上是量子化的。

我们将首先证明，粒子本身的质量和在时空中的扩散系数在质量作用原理框架下不仅仅是统计共轭量，而且满足最小不确定度的不确定性关系

$$\Delta m \Delta \mathcal{R} = h/2 \quad (4.4)$$

4.2 瞬时统计惯性质量

在本文中，质量反应了物质粒子受到时空子碰撞在时空中运动的统计性质。作为统计的物理量，其瞬时值的物理意义并不明确。我们并不能精确到每一个时空子碰撞粒子时粒子的统计质量如何度量，这实际上也是没有任何意义的。另一方面，在前文考虑时空子的能谱和碰撞时，我们已经证明了在单次碰撞中的时空子数目并不能确定。对于不确定数目的时空子碰撞，当然可以进行统计。即我们也可以定义瞬时质量。在闵科夫斯基时空中，时空子的分布是均匀且各向同性的。粒子的瞬时质量也会随着粒子本身的速度而改变。虽然粒子的瞬时质量 \hat{m} 每时每刻都不相同，但是当对粒子的速度再次取平均时，它就回归到统计惯性质量 m_{ST} ⁴。

由于每次碰撞交换的作用量并不一样，且每次碰撞的时空子的能量不一样，完成交换作用量的时间间隔也即单次碰撞时间自然也不一样。我们知道，时空子对质量粒子的碰撞反映到粒子本身的运动学上就是速度对于其经典速度的偏离。质量粒子速度的噪声部分 \vec{v} 表征粒子受到时空子撞击的速度的偏离。这个偏离越大，在同样的时空中，就表示粒子的统计惯性质量 m_{ST} 越小。另一方面，这个偏离大则代表粒子更容易在时空中扩散，因

⁴也有一种可能是时空子的碰撞给予了物质粒子质量的统计性质，而希格斯粒子则制造了物质粒子的平均质量。

而对应更大的时空扩散系数 \mathfrak{R} 。在测量的某个时刻，由于噪声的存在，粒子的瞬时质量不会严格等于 m_{ST} 。我们知道

$$\Delta m = \hat{m} - m_{ST}$$

但是每次得到的瞬时质量并没有实际意义，真正有意义的是标准差，即

$$\sigma(\hat{m}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{m}_i - m_{ST})^2} \quad (4.5)$$

同理，我们也只关注扩散系数的标准差

$$\sigma(\mathfrak{R}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\mathfrak{R}}_i - \mathfrak{R})^2} \quad (4.6)$$

这两个统计量之间的相对差异则用协方差来表示，即

$$\text{cov}(\hat{m}, \mathfrak{R}) = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{m}_i - m_{ST})(\hat{\mathfrak{R}}_i - \mathfrak{R})}{N\sigma(\hat{m})\sigma(\mathfrak{R})} \quad (4.7)$$

由于时空子噪声是一个白噪声，其标准差是一个常数。所以我们将它们定义为 1.

注意到当 $N \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{m}, \mathfrak{R}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{m}_i - m_{ST})(\hat{\mathfrak{R}}_i - \mathfrak{R})}{N} \\ &\equiv \langle \Delta \hat{m} \Delta \mathfrak{R} \rangle \end{aligned} \quad (4.8)$$

它正是我们需要的不确定关系的表达式的左边。下面的任务就是要计算出该式的具体数值。

我们将时间分片来考虑，在沿着粒子经典运动速度方向上切片。那么在每一个切片上，我们只需要考虑切片上的时空子对粒子的撞击作用。我们定义时间的切片间隔为 $\delta\tau$ 。

粒子在 i 时刻的瞬时质量可以如下定义：从 $i-1$ 时刻到 i 时刻，粒子受到时空子撞击的作用量的改变为 $\Delta S_i = S_i - S_{i-1}$ 。而粒子从 $i-1$ 时刻到 i 时刻的扩散的面积则为 $\hat{\mathcal{R}}_i$ 。那么瞬时质量可以看作

$$\hat{m}_i \equiv \frac{\Delta S_i}{\hat{\mathcal{R}}_i} \quad (4.9)$$

为了验证这个式子和前文的统计定义相匹配，我们需要将粒子作用量的改变写成粒子运动状态改变的形式，即

$$\Delta S_i = \frac{1}{4\pi} m_{ST} (V_i^2 - V_{i-1}^2) \delta\tau \quad (4.10)$$

其中 V_i 和 V_{i-1} 代表 i 和 $i-1$ 时刻粒子的真实速度。由于从时刻 $i-1$ 到时刻 i 粒子的经典运动速度不变，而碰撞的可微部分贡献即量子包络速度则是一个缓变的物理量，所以可以看成是也保持不变。所以所有变化的贡献都来自于时空子对粒子碰撞的噪声贡献，在经典情形下，上式可以写成

$$\begin{aligned} \Delta S_i &= \frac{1}{2} m (V_i^2 - V_{i-1}^2) \delta\tau \\ &= \frac{1}{2} m ((V_{i-1} + v_i)^2 - V_{i-1}^2) \delta\tau \\ &= \frac{1}{2} m (v_i^2 + 2V_{i-1}v_i) \delta\tau \end{aligned} \quad (4.11)$$

对上式求噪声的均值贡献，我们有

$$\langle \sum_i \Delta S_i \rangle_\nu = \langle \int \frac{1}{2} m (v_i^2 + 2V_{i-1}v_i) dt \rangle_\nu = \hbar/2 \quad (4.12)$$

但是值得注意的是，时空子对粒子的碰撞使得粒子速度发生改变的量并不是经典意义下的动能改变量，必须考虑狭义相对论性效应。在粒子的共动坐标系下，粒子的能量为

$$E = mc^2$$

而在静止坐标系下，它的能量则为

$$E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (4.13)$$

由此我们得到：

$$\begin{aligned}
\Delta S_i &= \left[\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{i-1}^2}{c^2}}} \right] \frac{\delta \tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v_{i-1}^2}{c^2}}} \\
&= \frac{m_0 c^2 \delta \tau_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{(v_{i-1} + v_i)^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_{i-1}^2}{c^2}\right)}} - \frac{m_0 c^2 \delta \tau_0}{\left(1 - \frac{v_{i-1}^2}{c^2}\right)} \\
&= \frac{m_0 c^2 \delta \tau_0 \left(\sqrt{\left(1 - \frac{v_{i-1}^2}{c^2}\right)} - \sqrt{\left(1 - \frac{(v_{i-1} + v_i)^2}{c^2}\right)} \right)}{\left(1 - \frac{v_{i-1}^2}{c^2}\right) \sqrt{\left(1 - \frac{(v_{i-1} + v_i)^2}{c^2}\right)}} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

特别的，在上面的式子中，我们应用了狭义相对论变换式：

$$m_i = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} \quad (4.15)$$

但由于从时间切片 $i-1$ 到时间切片 i 的作用量改变是洛伦兹标量。我们可以将 $i-1$ 时刻看作是质量为 m_{i-1} 的静止系，而 i 时刻则代表速度为 v_i 的参考系，由此，我们可以将等式 (4.14) 看成

$$\begin{aligned}
\Delta S_i &= \left(\frac{m_{i-1} c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} - m_{i-1} c^2 \right) \delta \tau_i \quad (4.16) \\
&= \left(\frac{1}{2} m_{i-1} v_i^2 + \frac{3}{8} (v_i^2/c^2)^2 c^2 m_{i-1} + \dots \right) \delta \tau_i
\end{aligned}$$

对噪声做平均可得：

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(\frac{1}{2} m_{i-1} v_i^2 + \frac{3}{8} (v_i^2/c^2)^2 c^2 m_{i-1} + \dots \right) \delta \tau_i \right\rangle_v \\
&= \frac{\hbar}{2} + \frac{3\hbar^2}{16c^2 m_{i-1} \delta \tau_i} + \frac{5\hbar^3}{64c^4 m_{i-1}^2 \delta \tau_i^2} \dots \quad (4.17)
\end{aligned}$$

当时间切片趋于经典极限，即 $\delta \tau_i$ 很大时，又因为 \hbar/c 是很小的数值，

$$\langle \hat{m}_i \hat{\mathfrak{X}}_i \rangle_v \simeq \frac{\hbar}{2} \quad (4.18)$$

即在任意的时间切片上，瞬时质量和瞬时扩散系数的乘积的平均值为 $\frac{h}{4}$ 。

由统计惯性质量 m_{ST} 和扩散系数 \mathfrak{R} 的定义，我们有：

$$\mathfrak{R} \equiv \sum_{i=1}^N \hat{\mathfrak{R}}_i / N \quad (4.19)$$

$$m_{ST} \equiv 2\pi \sum_{i=1}^N \hat{m}_i / N \quad (4.20)$$

显然这个定义并不会改变

$$\langle m_{ST} \mathfrak{R} \rangle_\nu = \frac{h}{2}$$

的本质。这是因为

$$\begin{aligned} \langle m_{ST} \mathfrak{R} \rangle_\nu &= 2\pi \left\langle \sum_{i=1}^N \hat{m}_i / N \sum_{j=1}^N \hat{\mathfrak{R}}_j / N \right\rangle_\nu \\ &= 2\pi \left[\sum_{i=j}^N \frac{\langle \hat{m}_i \hat{\mathfrak{R}}_i \rangle_\nu}{N^2} + \sum_{i \neq j}^N \frac{\langle \hat{m}_i \hat{\mathfrak{R}}_j \rangle_\nu}{N^2} \right] \\ &= \frac{h}{4N} + 2\pi \frac{\sum_{i=1}^N \langle \hat{m}_i \rangle \sum_{j \neq i}^N \langle \hat{\mathfrak{R}}_j \rangle}{N^2} + \mathcal{O}\left(\frac{h^2}{c^2 N}\right) \\ &= \frac{h}{4N} + \frac{N-1}{N} \frac{h}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{h^2}{c^2 N}\right) = \frac{h}{2} - \frac{h}{4N} - \mathcal{O}\left(\frac{h^2}{c^2 N}\right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时， $\langle m_{ST} \mathfrak{R} \rangle_\nu = \frac{h}{2}$ 。由此我们可知，切片定义和统计定义是一致成立的。

于是我们可以计算协方差

$$\begin{aligned} cov(\hat{m}, \mathfrak{R}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^N \Delta S_i - m_{ST} \sum_{i=1}^N \hat{\mathfrak{R}}_i - \mathfrak{R} \sum_{i=1}^N \hat{m}_i}{N} \\ &\quad + h/2 - \frac{h}{4N} - \mathcal{O}\left(\frac{h^2}{c^2 N}\right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

于是我们得到：

$$cov(\hat{m}, \mathfrak{R}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^N \Delta S_i}{N} - h/2 - \frac{h}{4N} - \mathcal{O}\left(\frac{h^2}{c^2 N}\right) \quad (4.23)$$

由质量作用原理，每一时刻时空子和质量粒子的碰撞带来的作用量的改变都是整数个普朗克常数的量。再由

$$\frac{\sum_{i=1}^N \Delta S_i}{N} = \frac{\hbar/2}{N} \quad (4.24)$$

最终我们得到不确定度关系：

$$\langle \Delta \hat{m} \Delta \mathcal{R} \rangle \geq \hbar/2 \quad (4.25)$$

4.3 位置-动量不确定关系

借用本文第七章中推导的结论即 $m = m_{ST}/2\pi$ ，我们考虑位置和动量的对易关系

$$\begin{aligned} [x, p] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\pi} x(t + i\epsilon) m_{ST} \frac{\delta x(t)}{\delta t} - \frac{1}{2\pi} m_{ST} \frac{\delta x(t + i\epsilon)}{\delta t} x(t) \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(i \frac{\epsilon}{2\pi} \left[m_{ST} \left(\frac{\delta x(t)}{\delta t} \right)^2 - m_{ST} \frac{\delta^2 x(t)}{\delta t^2} x(t) \right] \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

其中，我们并没有将统计惯性质量看作是一个变量。因为在考虑粒子受到时空子的撞击发生的位置变化时，粒子的统计属性不会发生改变。注意，在我们的推导中，位置和动量都存在瞬时的值，但两次测量并非是先验的等时的。我们这里的等时性和量子力学由本质的不同。这里由于存在时空子的撞击作用，任何两次测量之间不可能完全等时。所以我们让时间间隔 ϵ 趋于零来实现后验的等时对易关系。

我们可以定义

$$a_{ST}(t) := \frac{\delta^2 x(t)}{\delta t^2} \quad (4.27)$$

它是时空子对粒子的瞬时作用所造成的瞬时加速度，由此可以定义时空子对粒子的瞬时作用力

$$F_{ST}(t) = m a_{ST}(t) = m \frac{\delta^2 x(t)}{\delta t^2} \quad (4.28)$$

对上式求平均值可以知道

$$[x, p] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(m \langle V(t)^2 \rangle_v i\epsilon - \langle F_{ST}(t)x(t) \rangle_v i\epsilon \right) \quad (4.29)$$

Eq. (4.26) 的第二项的物理意义很明确，它就是时空子对粒子的作用力的平均做功。它的值等于零。原因在于时空子和粒子的碰撞总的做功平均为零。

而我們来看第一项的贡献，在涨落离散化下，平均的速度是

$$\int_t^{t+\epsilon} v(\tau) d\tau / \epsilon = \bar{v} / \sqrt{\epsilon}$$

因此

$$\langle v^2 \rangle_v = \langle \bar{v}^2 \rangle_v / \epsilon = \frac{h}{m_{ST}\epsilon} \quad (4.30)$$

代入 Eq. (4.29) 的第一项，

$$\begin{aligned} [x, p] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(i\epsilon m \langle v^2 \rangle_v + i\epsilon \langle U^2 \rangle_v \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i\epsilon m \frac{h}{m_{ST}\epsilon} + 0 = i\hbar \end{aligned} \quad (4.31)$$

这正是量子力学需要的最基本的假设，位置-动量不确定关系假设。

4.4 时间能量的不确定关系

在非相对论量子力学框架下，坐标动量的不确定关系和时间能量的不确定关系，之间并没有相互蕴含的关系，不能直接从一种关系推导得到另外一种关系。注意到，坐标，动量，能量都是动力学变量，这些动力学变量都是时间 t 的函数，也即时间 t 是自变量。我们可以做实验测量粒子的坐标，动量，能量，但不可能做实验测量粒子的时间。因为在非相对论框架下， t 是独立的变量，和粒子的状态无关。

我们定义时间能量不确定关系中的 Δt 为：系统发生显著变化所需要的时间。

刻画系统发生变化，必须有一个随时间变化的物理量 Q 。“显著”变化的时间定义为物理量 Q 变化一个标准差 σ_Q 所需要的时间，数学上表达为：

$$\sigma_Q = \left| \frac{d}{dt} \langle Q \rangle_v \right| \times \Delta t \quad (4.32)$$

我们定义时间能量不确定关系中的 ΔE 为：系统哈密顿量的不确定度 σ_H 。

物理量 Q 的平均值随时间演化的方程为：

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle_v = \frac{i}{\hbar} \langle [H, Q] \rangle_v \quad (4.33)$$

结合数学上的席瓦兹不等式

$$\sigma_H^2 \sigma_Q^2 \geq \left[\frac{1}{2i} \langle [H, Q] \rangle_v \right]^2 \quad (4.34)$$

并代入 ΔE 和 Δt 的定义表达式，我们将得到：

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4.35)$$

若系统中任意一个物理量快速变化，即 Δt 很小，那么系统能量的不确定 ΔE 将会很大。若 ΔE 很小即 Δt 很大，意味着此系统所有物理可观测量的变化都很缓慢。

5 时空中的自由粒子的动力学

5.1 真实速度的分解

在现代量子力学中，粒子并不存在运动轨迹，因而其速度并没有良好的定义。在质量作用原理的框架下，粒子的真实运动速度是必须要加以详细讨论的。在时空子的撞击作用下，粒子的运动速度不但包含了经典的速度，而且还有随机力学作用的结果。尤为重要是，粒子受到时空子的撞击作用，其本身的作用量的改变是量子化的。因此，粒子的真实运动速度应该会综合反映经典，随机和量子的性质。

在质量作用原理的框架下，粒子的运动是无摩擦的布朗运动。但是需要注意的是，粒子和时空子的撞击并非是完全随机的。每一次粒子受到时空子的撞击所改变的作用量是普朗克常数 h 的整数倍。因此粒子在时空中的运动不能完全是一个随机力学的问题。它是量子化的随机运动。对应的理论体系是一个马尔科夫过程。

如果不存在时空子以及其他外力的作用，自由粒子的运动就满足牛顿力学。它的运动速度就是经典速度。

在质量作用原理框架下，对于自由粒子的真实运动速度 $\vec{V}(\vec{x}, t)$ ，我们可以首先分离出来的是粒子的经典统计速度 $\vec{v}(\vec{x}, t)$ 。在时空子的背景下，它是一个将时空子的撞击看作是高斯噪声的统计的简单均值。由于高斯噪声的简单均值贡献为零，所以粒子的经典统计速度和牛顿力学下的经典速度在数值上是相等的。其次，在分离出经典统计速度 $\vec{v}(\vec{x}, t)$ 后，我们将要考虑的是一个随机运动。这个随机运动是由时空子的撞击驱动的，我们用随机运动速度 $\vec{W}(\vec{x}, t)$ 来标记它。在本文的附录 B 中，我们证明，任意的随机函数都可以分解为纯随机函数和一个可微函数的叠加。质量作用原理框架下的随机运动也遵循这一重要原则。因此，一般地，我们可以将随机运动速度 $\vec{W}(\vec{x}, t)$ 做如下的分解：

$$\vec{W}(\vec{x}, t) = \vec{u}(\vec{x}, t) + \vec{v}(t) \quad (5.1)$$

其中 $\vec{u}(\vec{x}, t)$ 我们定义为粒子的量子包络运动速度，对于自由粒子， $\langle \vec{u}(\vec{x}, t) \rangle_v = 0$ 。它对应的是随机运动中的微扰部分。它反映了如下的物理事实：时空子对于粒子撞击的这一部分虽然是随机的，但是它对于粒子当前的运动是微小的扰动。这些撞击是时空子对于粒子的“可微撞击”。在时空子的“可微撞击”作用下，粒子的运动并非是不可预测的随机行为，正是这一点使得粒子的运动状态最终可以用可微的函数来描述，并且描述粒子这一部分的运动状态的方程是一个非随机的偏微分方程。而 $\vec{v}(t)$ 则代表粒子受到时空子的“不可微撞击”，它对于粒子运动的速度而言，是一个非微扰的效应。我们定义它为“涨落速度”。正是因为这样的随机撞击的存在，我们最终描述粒子的运动方程得到的状态函数也将不是一个精确的描述，它只能是在这

个涨落背景上的一个概率性的描述。

我们将看到，在质量作用原理的框架下，量子包络运动反映的是粒子的波粒二象性。考虑任意一次的时空子和粒子的撞击作用，这期间交换的作用量为 nh 。对于统计质量为 m_0 的粒子，这次碰撞的特征时间是

$$t_c = \frac{nh}{m_0 c^2} \quad (5.2)$$

所谓的量子包络运动，其实质是时空子对于粒子的碰撞造成的涨落运动的可微部分。

以上的讨论是基于粒子受到时空子的撞击来分类的。从上面的分析我们可以看出，对于粒子的运动速度，实际上还可以有另一种“数学化”的分类。也即我们把粒子的运动速度分解为可微部分和不可微部分。粒子真实运动速度的可微部分可以定义为：

$$\vec{U}(\vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{x}, t) + \vec{u}(\vec{x}, t) \quad (5.3)$$

它是经典统计速度 $\vec{v}(\vec{x}, t)$ 和量子包络速度 $\vec{u}(\vec{x}, t)$ 的叠加。我们将此可微的速度称作是“统计平均速度”。尽管数学上它是一个可微的函数，但它和经典的速度是存在很大的区别的。因为其中存在一个量子包络速度 $\vec{u}(\vec{x}, t)$ ，它是时空子撞击粒子所形成的马尔科夫过程的反映。

因此时空子和粒子的碰撞所造成的粒子的运动速度的分解在原则上可以写成三部分：

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{x}, t) + \vec{u}(\vec{x}, t) + \vec{v}(t) \quad (5.4)$$

在本文成文后，我们发现这种三速度分解事实上和文献 [45] 中的随机过程的三分量沃尔德分解定理是一致的。我们知道一个马尔科夫过程的时间反演还是一个马尔科夫过程。这使得量子包络速度 $\vec{u}(\vec{x}, t)$ 在时间的反演下是不变的，即

$$T: \quad \vec{u}(\vec{x}, t) \rightarrow \tilde{\vec{u}}(\vec{x}, -t) = \vec{u}(\vec{x}, t) \quad (5.5)$$

但是经典统计速度在时间反演的作用下却是变号的，即

$$T: \quad \vec{v}(\vec{x}, t) \rightarrow \tilde{\vec{v}}(\vec{x}, -t) = -\vec{v}(\vec{x}, t) \quad (5.6)$$

利用时间反演下的性质，我们的理论框架有良好定义的牛顿极限，就是在量子包络速度 $\vec{u} = 0$ 的情形下回到牛顿力学。

$$\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{U} - \tilde{\vec{U}}) \quad (5.7)$$

$$\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{U} + \tilde{\vec{U}}) \quad (5.8)$$

其中 $\tilde{\vec{U}}$ 为统计平均速度 \vec{U} 的时间反演，在下文中，如不加说明，则带有 \sim 标记的都是时间反演的物理量。

而粒子运动速度的不可微部分，也就是时空子对于粒子的随机“不可微撞击”所带来的涨落速度 $\vec{v}(t)$ 。它将使得粒子的运动速度偏离经典的统计平均值，因此物理上它将反映为粒子在时空中的随机扩散行为。基于此，我们将它命名为粒子在时空中的“扩散速度”。

在下面的小节中，我们将看到上述的两种速度的分解对于推导粒子的运动方程，也即量子力学中的薛定谔方程以及对它的物理内涵的深入理解都是非常重要的理论基础。

5.2 从质量作用原理到薛定谔方程

如果没有时空子作用的影响，粒子的经典统计速度 \vec{v} 将是坐标 \vec{x} 对时间的全导数 $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ 。与一般的随机运动不同的是，时空随机运动是无摩擦的。否则的话，摩擦力的存在会引起粒子的随机运动会随时间衰减，而我们知道粒子本身的量子性质是永恒存在的，并没有这样的一种衰减机制。在质量作用原理下，粒子的坐标 $\vec{x}(t)$ 是一个随机过程，和统计平均速度 \vec{U} 之间并不能直接用对时间的全微分联系起来，而必须是对随机过程的某种平均，这个平均是相对于分布 $\delta\vec{x} = \vec{x}(t + \frac{1}{\omega}) - \vec{x}(t)$ ，在时空子对粒子的作用频率 ω 趋于无穷大的极限下的平均。在爱因斯坦的理论中 $\delta\vec{x}$ 是平均值为零，方差正比于 $\frac{1}{\omega}$ 的高斯分布。但是必须注意到，爱因斯坦关于布朗运动的理论在极小时间尺度，即时空子对粒子的作用频率 ω 趋于无穷大的极限下并不能成立 [21, 22]。我们将构造算符 D ，扮演经典力学中 $\frac{d}{dt}$ 的角色。对于任意

函数 $f(\vec{x}, t)$ 我们有

$$\begin{aligned}
& \omega(f(\vec{x}(t + \frac{1}{\omega}), t + \frac{1}{\omega}) - f(\vec{x}(t), t)) \\
&= [\partial_t + \sum_i \omega(x_i(t + \frac{1}{\omega}) - x_i(t))\partial_i \\
&+ \sum_{ij} \frac{\omega}{2}(x_i(t + \frac{1}{\omega}) - x_i(t))(x_j(t + \frac{1}{\omega}) - x_j(t))\partial_i\partial_j \\
&+ \sum_i (x_i(t + \frac{1}{\omega}) - x_i(t))\partial_i\partial_t + \frac{1}{2\omega}\partial_t^2]f(\vec{x}(t), t) \quad (5.9)
\end{aligned}$$

在时空子对粒子的作用频率 ω 趋于正无穷大的极限下对分布 δx 取时空子涨落下的统计平均 $\langle \dots \rangle_\nu$, 我们可以定义全导数如下

$$Df(x(t), t) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \omega \langle f(\vec{x}(t + \frac{1}{\omega}), t + \frac{1}{\omega}) - f(\vec{x}(t), t) \rangle_\nu \quad (5.10)$$

$$= (\partial_t + \sum_i U_i \partial_i + \sum_{ij} \mathfrak{K}_{ij} \partial_i \partial_j) f(\vec{x}(t), t) \quad (5.11)$$

其中我们运用了

$$\vec{U} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \omega \langle \delta \vec{x} \rangle_\nu \quad (5.12)$$

它相应于朗之万方程的离散化

$$x_i(t + \epsilon) - x_i(t) = \epsilon U_i(\mathbf{x}(t)) + \sqrt{\epsilon} \bar{v}_i + O(\epsilon^2) \quad (5.13)$$

其中

$$\epsilon = \frac{1}{\omega} \quad (5.14)$$

在方程 (5.10) 中, 我们使用了如下的推导结论

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{\omega \langle \delta x_i \delta x_j \rangle_\nu}{2} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\epsilon} \langle (x_i(t + \epsilon) - x_i(t))(x_j(t + \epsilon) - x_j(t)) \rangle_\nu \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\epsilon} \left[\langle \epsilon^2 U_i(\mathbf{x}(t)) U_j(\mathbf{x}(t)) \rangle_\nu + \epsilon \langle \bar{v}_i \bar{v}_j \rangle_\nu + \epsilon^{\frac{3}{2}} \langle (U_i \bar{v}_j + U_j \bar{v}_i) \rangle_\nu \right] \\
&= \frac{h}{2m_{ST}} \delta_{i,j} \quad (5.15)
\end{aligned}$$

根据质量作用原理，时空扩散系数矩阵为

$$\mathfrak{K}_{ij} = \frac{\hbar}{2m_{ST}} \delta_{i,j} = \mathfrak{K} \delta_{i,j} \quad (5.16)$$

上式中 m_{ST} 为时空所感知粒子的统计质量。而时空扩散系数 \mathfrak{K} 和前面两个模型的推导结果方程 (3.30) 和 (3.39) 是一致的。本文只讨论空间是三维的情况，二维空间的时空随机作用可能导致粒子的局域化，本文无需讨论这种情况。由此全导数 D 及其时间反演 \tilde{D} 为

$$D = \partial_t + \vec{U} \cdot \nabla + \mathfrak{K} \nabla^2 \quad (5.17)$$

$$\tilde{D} = -\partial_t + \vec{\tilde{U}} \cdot \nabla + \mathfrak{K} \nabla^2 \quad (5.18)$$

注意上式中 $\mathfrak{K} \nabla^2$ 项事实上反映了粒子的扩散速度 $\vec{v}(\vec{x}, t)$ 的影响。因为实际上这个扩散系数 \mathfrak{K} 来自于扩散速度 \vec{v} 的二次关联，即 $\langle v_i(t) v_j(t') \rangle_v = 2\mathfrak{K} \delta(t - t')$ 。由此，粒子的统计平均速度 \vec{U} 就表达为

$$\vec{U} = D \vec{x} \quad (5.19)$$

$$\vec{\tilde{U}} = \tilde{D} \vec{x} \quad (5.20)$$

其经典统计速度和量子包络速度表达为

$$\vec{v} = D^- \vec{x} \quad (5.21)$$

$$\vec{u} = D^+ \vec{x} \quad (5.22)$$

其中

$$D^- = \frac{1}{2}(D - \tilde{D}) \quad (5.23)$$

$$D^+ = \frac{1}{2}(D + \tilde{D}) \quad (5.24)$$

由此，我们可以把粒子的统计平均加速度定义为

$$\begin{aligned} \vec{a} &= D \vec{U} = (D^+ + D^-)(\vec{v} + \vec{u}) \\ &= D^+ \vec{u} + D^- \vec{v} + D^- \vec{u} + D^+ \vec{v} \end{aligned} \quad (5.25)$$

在时间反演下:

$$\begin{aligned}\tilde{\vec{a}} &= \tilde{D}\tilde{\vec{u}} = (D^+ - D^-)(-\vec{v} + \vec{u}) \\ &= D^+\vec{u} + D^-\vec{v} - D^-\vec{u} - D^+\vec{v}\end{aligned}\quad (5.26)$$

我们可以定义粒子的经典平均加速度是

$$\vec{a}_c = \frac{1}{2}(\vec{a} + \tilde{\vec{a}}) = D^+\vec{u} + D^-\vec{v}\quad (5.27)$$

显然 \vec{a}_c 在时间反演的作用下是不变的。由于自由粒子的经典平均加速度为零，此条件可以简洁的写为

$$D^+\vec{v} + D^-\vec{u} = 0\quad (5.28)$$

但是量子包络运动的平均加速度并不能简单的认为是零，

$$D^+\vec{u} + D^-\vec{v} \neq 0\quad (5.29)$$

但是由于在经典低速情形下，我们可以认为

$$D^-\vec{v} - D^+\vec{u} = 0\quad (5.30)$$

此条件完全等价于下面一组耦合非线性的偏微分方程组

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\mathfrak{K}\nabla^2\vec{v} - \nabla(\vec{u} \cdot \vec{v})\quad (5.31)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \mathfrak{K}\nabla^2\vec{u}\quad (5.32)$$

粒子在时空中不断的受到质量作用而做随机运动，是一个马尔科夫过程。马尔科夫过程的本质就是，只有当前的信息可以用来预测未来，一切历史的信息都没有意义。在最简单的情形，就是粒子不受任何外势作用，受到时空的作用做马尔科夫型的随机时空运动。我们现在是面临的是一个初值问题，即给定 $\vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}_0(\vec{x}), \vec{v}(\vec{x}, 0) = \vec{v}_0(\vec{x})$ 求解 $\vec{u}(\vec{x}, t), \vec{v}(\vec{x}, t)$. 求解这样复杂的非线性偏微分方程组，必须先把它线性化 [23, 24, 25]。

设

$$\Psi = e^{R+iI} \quad (5.33)$$

, 其中我们令

$$\nabla R = \frac{1}{2\mathfrak{K}} \vec{u} \quad (5.34)$$

$$\nabla I = \frac{1}{2\mathfrak{K}} \vec{v} \quad (5.35)$$

由此可导出一个二阶微分方程

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\mathfrak{K} \nabla^2 \Psi \quad (5.36)$$

回到最原初的假设, 由于质量作用原理, 时空普适的扩散系数本质上为时空扩散系数 $\mathfrak{K} = \frac{h}{2m_{ST}}$. 代入上式, 自由粒子在时空的运动方程就会被明显得到, 它就是薛定谔方程

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{h \nabla^2}{2m_{ST}} \Psi \quad (5.37)$$

根据连续性方程

$$\partial_t \rho(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (5.38)$$

粒子流的定义为密度乘以速度。在质量作用原理框架中, 这个定义里面的速度对应经典统计速度。我们就可以自然导出波恩诠释, 推导如下:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (5.39)$$

其中

$$\vec{v} = 2\mathfrak{K} \nabla I \quad (5.40)$$

将 (5.33) 代入薛定谔方程

$$\partial_t \Psi = i\mathfrak{K} \nabla^2 \Psi \quad (5.41)$$

令实部虚部分别相等, 有

$$\partial_t R + \mathfrak{K}(2\nabla R \cdot \nabla I + \nabla^2 I) = 0 \quad (5.42)$$

联立

$$\partial_t \rho(\vec{r}, t) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (5.43)$$

解得

$$\rho = e^{2R} \quad (5.44)$$

由此，我们得到粒子数密度的分布恰好为波函数模方。若进一步考虑多个全同粒子组成的系综，粒子数密度解释为概率密度，即为波恩诠释。波恩在 1926 年提出 [26]，量子系统的描述是概率的，一个事件的概率是波函数的绝对值平方。这个解释成为哥本哈根学派的重要基石之一。在本文中，我们以随机时空运动的物理图景，自然呈现 (emergent) 出波恩诠释，为波函数的实在性提出一个新的诠释。在这个呈现中，波函数为复数是绝对必要的。如果只是实的正弦波或余弦波，那么根据 $\rho = |\Psi|^2$ ，确定动量的自由粒子在空间中的概率分布将呈现周期性的震荡，违反了空间的均匀性质 [27]。从本节的框架出发，可以直接证明海森堡不确定关系，参见附录 D。

5.3 势函数 R 和 I 的意义

将 $\Psi = e^{R+iI}$ 代入 $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\mathfrak{K}\nabla^2\Psi$ ，分别令实部虚部相等，我们得到以下方程组

$$\partial_t R = -\mathfrak{K}(2\nabla R \cdot \nabla I + \nabla^2 I) \quad , \quad (5.45)$$

$$\partial_t I = \mathfrak{K}[(\nabla R)^2 - (\nabla I)^2 + \nabla^2 R] \quad (5.46)$$

利用上一节我们证明的波恩诠释 $\rho = |\Psi|^2 = e^{2R}$ ，我们有

$$\partial_t \rho = 2\rho \partial_t R \quad , \quad (5.47)$$

$$\nabla \rho = 2\rho \nabla R \quad (5.48)$$

将方程 (5.47, 5.48) 代入 (5.45)，关于势函数 R 的微分方程可以化为

$$\partial_t \rho = -2\mathfrak{K}\nabla \cdot (\rho \nabla I) \quad (5.49)$$

根据定义就有 $\nabla I = \frac{1}{2\hbar} \vec{v}$, 而关于势函数 R 的微分方程完全等价于连续性方程

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (5.50)$$

注意到粒子的经典动量为 $m\vec{v} = \hbar \nabla I$, 势函数 I 的微分方程可以被写为

$$\partial_t(\hbar I) + \frac{(\nabla(\hbar I))^2}{2m} - \hbar \Re[(\nabla R)^2 + \nabla^2 R] = 0 \quad (5.51)$$

对比经典力学粒子在外势 V 中的哈密顿雅可比方程 (可参考 [28, 29])

$$\partial_t S + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(x) = 0 \quad (5.52)$$

存在两个重要的发现。第一, 势函数 I 就是哈密顿雅可比函数 S , 只差一个 \hbar 因子, 即 $S = \hbar I$.

第二, 自由粒子在时空中, 受质量作用的影响呈现为时空势

$$V_{ST} = -\hbar \Re[(\nabla R)^2 + \nabla^2 R] \quad (5.53)$$

此时空势 V_{ST} 完全扮演经典力学哈密顿雅可比方程中外势 V 的作用。在经典极限 $\hbar = 0$ 下, 时空势 V_{ST} 消失, 即为自由粒子在经典力学中 $V = 0$. 当 \hbar 的影响不能忽略的时候, 质量作用呈现出来的时空势 V_{ST} 将能从原理上解释所有的量子行为。在此图景下, 粒子的运动可以得到精确客观的描述

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\nabla V_{ST} = \hbar \Re \nabla [(\nabla R)^2 + \nabla^2 R] \quad (5.54)$$

这个方程表明, 在时空子的作用下, 自由粒子的运动将不再是匀速运动, 而是受到一个时空势 V_{ST} 的作用, 正是在这个作用的驱动下, 使粒子呈现统计质量。

5.4 带电粒子在电磁场中的随机时空运动

在低速情形下, 我们可以认为电磁场不受随机时空运动的影响, 只是作为一个外场而存在。对于任意的电磁场 (\vec{E}, \vec{B}) , 带电粒子将受到洛伦兹力 $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ 。因此带电粒子的经典平均加速度 [30] 为

$$\vec{a} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})/m \quad (5.55)$$

其中 m 为带电粒子质量, e 为带电粒子的电荷。在此基础上重新推导带电粒子在电磁场中的随机时空运动的运动学方程是有意义的。也即在质量作用原理框架下自然得到带电粒子在电磁场和时空的的双重作用下的运动方程,

$$i\hbar\partial_t\Psi = \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{A})^2\Psi + e\phi\Psi \quad (5.56)$$

其中电磁势和电磁场的关系为

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \vec{E} = -\partial_t\vec{A} - \nabla\phi \quad (5.57)$$

原来我们令自由粒子的经典平均加速度为零。在粒子带有电荷的情形下,把洛伦兹力公式中的速度定义为经典统计速度,在有电磁场的情况下成为

$$\partial_t\vec{v} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})/m - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \Re\nabla^2\vec{u} \quad (5.58)$$

所以在有电磁场的情况下,其运动学方程将为下面一组耦合非线性的偏微分方程组:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = -\Re\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = & e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})/m - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \\ & + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \Re\nabla^2\vec{u} \end{aligned} \quad (5.60)$$

求解这个非线性偏微分方程组,仍然必须先把它线性化。设 $\Psi = e^{R+iI}$, 注意到电磁场中粒子的正则动量 [30] $\vec{p} = m\vec{v} + e\vec{A}/c$, 我们设

$$\nabla R = \frac{1}{2\Re}\vec{u} \quad (5.61)$$

$$\nabla I = \frac{1}{2\Re}(\vec{v} + \frac{e\vec{A}}{mc}) \quad (5.62)$$

先把方程 (5.56) 的右边第一项展开为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{A})^2\Psi = & -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\Psi + \frac{e^2A^2}{2mc^2}\Psi \\ & + \frac{i\hbar e}{2mc}(\nabla \cdot \vec{A})\Psi + \frac{i\hbar e}{mc}\vec{A} \cdot (\nabla\Psi) \end{aligned} \quad (5.63)$$

代入 $\Psi = e^{R+iI}$ 成为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}[\nabla^2 R + i\nabla^2 I + (\nabla R + i\nabla I)^2]\Psi + \frac{e^2 A^2}{2mc^2}\Psi + \frac{i\hbar e}{2mc}(\nabla \cdot \vec{A})\Psi + \frac{i\hbar e}{mc}(\vec{A} \cdot (\nabla R + i\nabla I))\Psi \quad (5.64)$$

利用矢量公式，对任意两个矢量 \vec{A} 和 \vec{B} 的标量积的梯度为

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} \quad (5.65)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) + \nabla^2 \vec{A} \quad (5.66)$$

并且由方程 (5.61)，即有

$$\nabla \times \vec{u} = 0 \quad (5.67)$$

$$\nabla \times \left(\vec{v} + \frac{e\vec{A}}{mc} \right) = 0 \quad (5.68)$$

把 $\Psi = e^{R+iI}$ 代入后两边同时除以 Ψ ，可以得到

$$i\hbar(\partial_t R + i\partial_t I) = -\frac{\hbar^2}{2m}[\nabla^2 R + i\nabla^2 I + (\nabla R + i\nabla I)^2] + \frac{e^2 A^2}{2mc^2} + \frac{i\hbar e}{2mc}(\nabla \cdot \vec{A}) + \frac{i\hbar e}{mc}(\vec{A} \cdot (\nabla R + i\nabla I)) + e\phi \quad (5.69)$$

下面我们分别严格证明方程两边的实部虚部都相等，即要证

$$\partial_t I = \frac{\hbar}{2m}(\nabla^2 R + (\nabla R)^2 - (\nabla I)^2) - \frac{e^2 \vec{A}^2}{2mc^2} + \frac{e}{mc}(\vec{A} \cdot (\nabla I)) - \frac{e\phi}{\hbar} \quad (5.70)$$

$$\partial_t R = -\frac{\hbar}{2m}(\nabla^2 I + 2(\nabla R) \cdot (\nabla I)) + \frac{e}{2mc}(\nabla \cdot \vec{A}) + \frac{e}{mc}\vec{A} \cdot (\nabla R) \quad (5.71)$$

对此两式两边同时取梯度，并且利用定义 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \nabla\phi$ ，可以重新得到方程 (5.59)，至此我们证明了方程 (5.56) 两边的梯度相等，那么

方程两边最多差一个梯度为零的函数。重要的是，电磁势的选择并不是唯一的，存在如下的规范变换（可参考 [31]）

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda \quad (5.72)$$

$$\phi' = \phi - \partial_t\Lambda \quad (5.73)$$

对任意函数 $\Lambda(\vec{x}, t)$ ，保证所得到的电磁场 \vec{E} 和 \vec{B} 保持不变。因此相应的波函数不能有本质的改变，最多差一个局域相因子。容易证明，当选取 $\psi' = \psi e^{\frac{ie\Lambda}{\hbar c}}$ ，电磁场中的薛定谔方程保持不变，这就是 $U(1)$ 规范对称性。利用方程这个 $U(1)$ 规范对称性，我们可以适当选取任意函数 $\Lambda(\vec{x}, t)$ ，消去一个梯度为零的函数。至此，我们证明了电磁场中的薛定谔方程。

5.5 质量作用原理图景中的定态薛定谔方程

对照经典统计速度的定义方程 (5.35)，容易发现对于量子力学基态，经典统计速度为零。进一步的，可以证明，对于所有定态，其经典统计速度都为零。对于有确定能量 E 的物理态，薛定谔方程成为

$$\left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_c(\vec{x})\right]\Psi = E\Psi \quad (5.74)$$

对此方程两边取复共轭得到

$$\left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_c(\vec{x})\right]\Psi^* = E\Psi^* \quad (5.75)$$

其中 $V_c(\vec{x})$ 为经典外场。以上两式相加，新的实数波函数 $\Phi = \Psi + \Psi^*$ 必满足相同确定能量 E 的薛定谔方程。因为新波函数 Φ 无虚部，其对应的经典统计速度 \vec{v} 必须为零。由此启发，在随机时空运动的图景中，我们可以把量子力学的定态（能量本征态）重新诠释为经典统计速度为零的随机时空运动。一旦有了能量本征态，就可以通过线性叠加得到薛定谔方程的通解。所以，从经典统计速度 $\vec{v} = 0$ 出发，简明重新推导出定态薛定谔方程是自然的，这样可以减少第一部分证明一些繁琐的数学及其假设，让随机时空

运动的物理图景更加突出。更加重要的是, 为质量作用原理框架下的下一步相对论性的推广提供一个更清晰的框架。

粒子在时空中做随机时空运动, 运动的路径可以看成是可微路径叠加上运动的扩散路径。在 Δt 时间里的位移有两部分的贡献

$$\begin{aligned}\delta\vec{x} &= \vec{U}(\vec{x}, t)\Delta t + \Delta\vec{x} = (\vec{u}(\vec{x}, t) + \vec{v}(\vec{x}, t))\Delta t + \Delta\vec{x} \\ &= \vec{u}(\vec{x}, t)\Delta t + \Delta\vec{x}\end{aligned}\quad (5.76)$$

其中 $\vec{u}(\vec{x}, t)$ 为量子包络速度, $\Delta\vec{x}$ 来自随机时空运动的涨落, 其分布自然满足 $\varphi(\Delta\vec{x}) = \varphi(-\Delta\vec{x})$ 和 $\int \varphi(\Delta\vec{x})d(\Delta\vec{x}) = 1$. 时空扩散系数的定义为

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{2\Delta t} \int (\Delta\vec{x})^2 \varphi(\Delta\vec{x})d(\Delta\vec{x}) \quad (5.77)$$

设 $\rho(x, t)$ 是随机时空运动粒子 t 时刻处在 x 处的概率密度, 经过无穷小时间间隔 Δt , 我们 [32, 33, 34]

$$\rho(\vec{x}, t + \Delta t) = \int \rho(x - \delta\vec{x}, t)\varphi(\Delta\vec{x})d(\Delta\vec{x}) \quad (5.78)$$

两边泰勒展开到 Δt 的第一阶, 我们得到

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho\vec{u}) + \mathfrak{K}\nabla^2 \rho \quad (5.79)$$

此为概率密度演化的福克普朗克方程。在任意外场 $V_c(\vec{x})$ 中, 粒子的量子包络速度的变化有两部分的贡献, 一部分来自随机时空运动的涨落, 一部分来自于外场提供的加速度。因此粒子的平均速度经过无穷小时间间隔 Δt 将成为

$$\begin{aligned}\vec{u}(\vec{x}, t + \Delta t) &= \frac{\int (\vec{u}(\vec{x} - \delta\vec{x}, t) - \Delta t \nabla V_c(\vec{x} - \delta\vec{x})/m)\rho(x - \delta\vec{x}, t)\varphi(\Delta\vec{x})d(\Delta\vec{x})}{\int \rho(x - \delta\vec{x}, t)\varphi(\Delta\vec{x})d(\Delta\vec{x})}\end{aligned}\quad (5.80)$$

其中分母为概率分布的归一化因子。两边泰勒展开到 Δt 的第一阶, 可以得到

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla V_c + \mathfrak{K}m \left(\frac{\nabla^2(\rho\vec{u})}{\rho} - \vec{u} \frac{\nabla^2 \rho}{\rho} \right) \quad (5.81)$$

由此可以看出量子包络速度 \vec{u} 对应的加速度，其动力学根源于经典势和量子势的共同贡献。对于有确定能量的物理态，本文的三速度分解 $\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{v}$ 都具备清晰的物理意义。其中量子包络速度 $\vec{u}(\vec{x}, t)$ 和经典统计速度 $\vec{v}(\vec{x}, t)$ 都是速度场，即为时空坐标的函数。有确定能量的物理态其经典统计速度场处处为零，可以作为量子力学稳定态新的诠释。其量子包络速度场 $\vec{u}(\vec{x}, t)$ 的动力学机制有两部分贡献，粒子所处的经典外势场和由时空子随机碰撞产生的量子势场。扩散速度 $\vec{v}(t)$ 为时空涨落的背景，在空间中均匀分布，在时间中满足布朗运动的性质，为时空的内禀属性。这三部分速度之和，才是唯物主义所要求的粒子客观实在的真实速度。参见附录 B。定态的条件为 $\partial_t \rho = 0$ ，可知

$$\vec{u} = \Re \frac{\nabla \rho}{\rho} \quad (5.82)$$

$$\partial_t \vec{u} = 0 \quad (5.83)$$

必须特别注意到

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (5.84)$$

在定态中粒子的量子包络速度 \vec{u} 并不为零。结合定态条件，可以得到

$$-2m\Re^2 \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + V_c(x) = \text{常数} \quad (5.85)$$

可以证明此常数等于粒子的平均能量

$$E = \int \rho \left(\frac{1}{2} m u^2 + V_c \right) d^3x \quad (5.86)$$

至此我们推导了

$$-2m\Re^2 \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + V_c(x) = E \quad (5.87)$$

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{-iEt/\hbar} \quad (5.88)$$

取 $\Re = \frac{\hbar}{2m}$ ，就可以得到定态 $\psi = \sqrt{\rho} e^{-iEt/\hbar}$ 的薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \psi + V_c \psi = E \psi \quad (5.89)$$

5.6 质量作用原理图景中的氢原子基态

氢原子系统中，我们可以取 $\vec{A} = 0$ 和 $\phi = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$ 。方程 (5.56) 的定态解满足

$$E\Psi = \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla)^2\Psi - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\Psi \quad (5.90)$$

其能量最低的定态解（基态波函数）为 $\Psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}$ ，其中 $a = 5 \times 10^{-11}m$ 为氢原子的波尔半径。利用氢原子基态的波函数，我们可以得到其量子包络速度为

$$\vec{u} = 2\Re\nabla R = -\frac{\hbar}{ma}\hat{r} = -c\alpha\hat{r} \quad (5.91)$$

其中 c 为真空中的光速， \hat{r} 为单位矢量 $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ 。同样的我们可以得到其经典统计速度为

$$\vec{v} = 2\Re\nabla I = 0 \quad (5.92)$$

其时空涨落速度满足

$$\langle v_i \rangle = 0, \langle v_i(t)v_j(t') \rangle = \Re\delta_{ij}\delta(t-t') \quad (5.93)$$

那么在氢原子基态中的电子，其坐标 $\vec{X}(t)$ 作为一个随机变量，与其真实速度 \vec{V} 满足以下微观动力学方程

$$\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \vec{V}(t) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{v} = -c\alpha\hat{r} + \vec{v}(t) \quad (5.94)$$

这就是在质量作用原理图景下，氢原子基态电子的真实运动方程。其量子包络速度永远指向氢原子质子中心扩散，但越靠近中心，时空势产生的排斥力越大。因为此包络速度在经典库伦势和时空势的共同作用下取得平衡，氢原子才能稳定在基态之上。

根据质量作用原理下氢原子基态电子的真实运动图景，我们可以计算电子的平均动能为

$$\langle K \rangle = \frac{m}{2} \langle \vec{V}(t)^2 \rangle = \frac{m}{2}(\alpha c)^2 + \frac{m}{2} \langle \vec{v}(t)^2 \rangle \quad (5.95)$$

其中时空涨落速度平方的平均值为

$$\langle \vec{v}(t)^2 \rangle = \mathfrak{R}/T \quad (5.96)$$

其中 T 为时空子对电子的累积作用时间。氢原子基态可以存在无穷久，即 T 趋于无穷大，由此我们可以得到基态电子的平均动能为

$$\langle K \rangle = \frac{m}{2} \langle \vec{V}(t)^2 \rangle = \frac{m}{2} (\alpha c)^2 \quad (5.97)$$

我们可以计算电子的平均势能为

$$\langle U(r) \rangle = \langle -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \rangle = \langle -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \rangle \quad (5.98)$$

其中 a 为玻尔半径， ϵ_0 为真空介电常数。基态电子的平均能量为平均动能和平均势能之和。将各个物理常数的标准值代入，我们可以得到基态电子的平均能量的数值结果为

$$E = \langle K \rangle + \langle U \rangle = -13.6\text{eV} \quad (5.99)$$

重要的是，我们通过质量作用原理的微观运动方程，得到了和量子力学一样的结论。由此可以看出，量子力学只是反映了真实运动过程的统计平均性质，并不能反映质量作用原理框架下的全部物理。

5.6.1 质量作用原理导出电荷量

根据质量作用原理，粒子和时空子交换的作用量（作用量的基本定义为动量和位移之积）为

$$nh = \oint pdq \quad (5.100)$$

举例说明，最简单的匀速圆周运动中

$$\oint pdq = 2\pi mvr \quad (5.101)$$

考虑氢原子内部的电子。时空子碰撞提供无规则的布朗运动, 质子的吸引力提供向心力, 平衡条件为

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (5.102)$$

联立解得电荷的量为

$$e = nh \sqrt{\frac{\epsilon_0}{m\pi r}} \quad (5.103)$$

可以精确地得到电子电荷的精确值。我们知道在时空作用原理中, 交换的作用量为 nh , 其中 n 可为任意的整数。

我们只需做一个假定, 电子所处的轨道由时空作用量子数 n 决定, 此假定的证明见下一节。即当 $n = 1$ 时, 电子落在波尔轨道上 ($r = 0.53 \times 10^{-10} m$)。当 $n = 2$ 时, 电子落在第二轨道上 (由此类推)。即可得到重要的结果 (以下数值全部采用国际单位)

$$h = 6.62 \times 10^{-34}, m = 9.11 \times 10^{-31}, \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$$

代入得到电荷量为

$$e = 1.6 \times 10^{-19} C \quad (5.104)$$

5.6.2 时空作用量子数 n 决定电子轨道

我们要证明的是, 当电子在波尔轨道上 ($r = a$), 和时空子交换的作用量刚好为一个普朗克常数, 即

$$h = 2\pi mva \quad (5.105)$$

利用前文导出的氢原子基态波函数

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \quad (5.106)$$

可以求出动量大小的平均值为

$$mv = p = \left| \int \psi^* (-i\hbar \nabla) \psi d\tau \right| = \frac{\hbar}{a} \quad (5.107)$$

其中积分体积元为 $d\tau = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr$, 代入得到 $h = 2\pi mva$.

5.6.3 推广到任意类氢原子的一般情形

粒子和时空子交换的作用量 (作用量的基本定义为动量和位移之积) 为

$$nh = \oint pdq \quad (5.108)$$

在匀速圆周运动中

$$\oint pdq = 2\pi mvr \quad (5.109)$$

对于带 Z 正电荷原子核的类氢原子里面的电子。时空子碰撞提供无规则的布朗运动, 原子核的吸引力提供向心力, 平衡条件为

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (5.110)$$

联立解得电荷的量为

$$e = nh \sqrt{\frac{\epsilon_0}{Zm\pi r}} \quad (5.111)$$

类氢原子电子对应 $n = 1$ 的波尔轨道为 $r = a/Z$, 由此可以导出基本电荷量。

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C} \quad (5.112)$$

我们从质量作用原理出发, 对自由物质粒子做了透彻的研究, 得到了一系列量子力学最重要的结论。现在更进一步, 由质量作用原理解释了原子稳定性最根本的原因, 并且第一性原理计算出准确的电子电荷量这一基本重要的物理量。由此可见, 时空的随机碰撞并不只是提供无规则的背景噪声制造混乱, 而是在看似混乱的背景中创造出来一切物质的稳定性, 这是在最深刻层面上, 唯物主义认识物理世界的矛盾统一。

6 质量作用原理下的量子测量

6.1 质量作用原理下的测量原理

质量作用原理框架下的测量理论是和哥本哈根诠释的测量理论是有根本的不同的。在质量作用原理的框架下, 因为时空子每时每刻都和物质粒子

发生相互作用, 故而无法在两次碰撞的时间间隔内完成一次测量, 所以对于粒子的任何与位置及动量相关的测量都将不会是准确的测量, 其测量的误差将会是统计上无法消除的。因而相互不对易的物理量不仅仅是不能同时被测准, 从根本上来说, 它们被分开单独测量时, 也不可能得到准确的测量值。理论上, 所有测量值都将是统计上的平均值, 并且这个平均值不仅仅包含一般的测量误差, 还包括时空撞击所赋予的内禀不确定度。物质粒子的动量内禀不确定度, 主要由时空涨落质量所决定。质量作为一种统计属性, 其最小涨落 Δm_{st} 为统计质量的涨落。而坐标的内禀不确定度 ΔX_{st} 约为两次时空子随机撞击之间的自由飞行距离。

当时空可感知的质量和粒子的统计惯性质量等价时, 粒子在时空中的运动由薛定谔方程决定。也即在时空中, 运动的物质粒子和传播的波是统一在一起的。当我们对于粒子进行观测时。我们需要使用能够和粒子发生相互作用的测量工具。但是每次这样的测量都会使得粒子的随机运动被打断。因此一次测量代表着一个马尔科夫过程的结束。而当测量完成时, 则代表着一个新的马尔科夫过程的开始。对于粒子运动的波函数而言, 测量开始前和测量开始后的波函数的相位是毫不相关的。两个相位不相关的概率波不会发生干涉效应。在这个框架下, 并不需要引入波包塌缩或者多宇宙的假说。

6.2 质量作用原理下的 EPR 悖论

爱因斯坦及其合作者在 1935 年的文章中提出这样的理想实验: 两个粒子在 x 轴上运动, 坐标为 x_1, x_2 动量为 p_1, p_2 , 总动量为 $P = p_1 + p_2$, 相对位置为 $X = x_1 - x_2$ 。根据量子力学的基本原理, 因为 $[X, P] = 0$, 两个力学量之间互相对易, 可以允许同时测准两个粒子的总动量和相对位置。测量粒子 1 得到 p_1 的动量, 马上能得到粒子 2 的动量为 $P - p_1$ 。假设接着测量粒子 1 的位置为 x_1 , 那么就能知道粒子 2 的位置为 $x_1 - X$ 。很容易理解, 对粒子 1 的位置测量会影响到粒子 1 的动量, 导致粒子 1 的动量不再有确定的值 p_1 。但不能理解的是, 粒子 1 和粒子 2 相隔很远, 它们之间如何相互影响呢? 如果相互影响不存在, 那么在测量粒子 1 位置之后, 粒子 2 必

然同时有确定的动量和位置，此结论违反了量子力学的不确定性关系。如果粒子 1 和粒子 2 之间有相互影响，那就是爱因斯坦所称的鬼魅的超距作用，违反局域实在论。如果粒子 1 和粒子 2 之间没有相互影响，那就违反了量子力学基本原理要求的不确定性关系。这也就是 EPR 的悖论所在。量子力学对此悖论的正统解释为，即使两个粒子相距很远，对粒子 1 的第二次测量（测量位置），仍然会导致粒子 2 不再有确定的动量，这种现象称之为量子纠缠。

下面我们来仔细考量整个实验过程，根据质量作用原理对各个不确定度做深入的分析。假设一个静止的粒子衰变为两个质量相同的粒子，总动量为 0。其相对位置随时间的演化为

$$x_1 - x_2 = x_{10} - x_{20} + (p_1 - p_2)t/m \quad (6.1)$$

其中 x_{10}, x_{20} 为两个粒子的初始位置。首先注意到，在质量作用原理下，每一个有质量的粒子都受到时空的随机撞击，两个粒子的初始相对位置本身并不能绝对测准，存在着质量作用原理下的内禀不确定度记为 $\Delta X_{st} = \Delta|x_{10} - x_{20}|$ ，此内禀不确定度 ΔX_{st} 约为两次时空随机撞击之间的自由飞行距离。由质量作用原理推导出来的不确定性关系，要求动量差必须具备有内禀不确定度 $\Delta P_{st} = \Delta|p_1 - p_2| \geq \frac{\hbar}{\Delta X_{st}}$ ，因为有对易关系 $[x_1 - x_2, p_1 - p_2] = 2i\hbar$ 。那么对相对位置的测量的不确定度至少为

$$\Delta|x_1 - x_2| = \Delta X_{st} + \frac{\hbar t}{\Delta X_{st} m} \quad (6.2)$$

此不确定度对应的极小值在 $\Delta X_{st} = \sqrt{\frac{\hbar t}{m}}$ ，代入可以得到

$$\Delta|x_1 - x_2| \geq 2\sqrt{\frac{\hbar t}{m}} \quad (6.3)$$

同样的，在质量作用原理下，质心系的总动量 P 并不严格为零，存在着由统计质量导致的内禀不确定度至少为

$$\Delta P = \Delta m_{st} \bar{v} / 2\pi \quad (6.4)$$

其中 Δm_{st} 为统计质量的涨落，约为电子质量的百万分之一。根据质量作用原理下的内禀不确定度，同样进行前面所述 EPR 的实验，在对粒子 1 进行两次测量之后，粒子 2 的动量和坐标至少具有以下的不确定度

$$\Delta p_2 \Delta x_2 = 2 \sqrt{\frac{\hbar t}{m}} \Delta m_{st} v \quad (6.5)$$

非常重要的是，质量作用原理赋予粒子 2 的内禀不确定度（因为测量过程只对粒子 1 进行测量，此内禀不确定度为时空赋予的最小不确定度），是否违反量子力学的不确定性原理呢？如果

$$\Delta p_2 \Delta x_2 \leq \frac{\hbar}{2} \quad (6.6)$$

那么仍然违反了量子力学的不确定性原理，实验将会观察到所谓“量子纠缠”的现象，因为此时必须假设两个粒子之间有相互影响赋予粒子 1 其他的不确定度，让不确定性原理重新得到满足。由此我们得到重要的结论，实验上要观察到量子纠缠的现象，必须满足：

$$\frac{\Delta m_{st}^2}{m^2} \leq \frac{\pi \lambda_d}{8L} \quad (6.7)$$

其中 $\lambda_d = \frac{h}{mv}$ 为粒子的德布罗意波长， L 为两个粒子之间的距离。由此我们得到一个重要结论，即存在一个量子纠缠的特征距离：

$$L^* = \frac{\pi \lambda_d}{8} \left(\frac{m}{\Delta m_{st}} \right)^2 \quad (6.8)$$

当两个粒子相距超过特征距离 L^* 时，不等式将不再得到满足，将不能由实验结果判断是否存在动量坐标的量子纠缠现象，因为时空赋予粒子 2 的内禀不确定度已经自动满足不确定性原理的要求，不能认为存在着爱因斯坦所说的“鬼魅般的超距作用”。对于以百分之一光速运动的电子，此特征距离 $L^* \approx 40m$ 。对于以百分之一光速运动的原子，此特征距离 $L^* \approx 4 \times 10^7 m$ 。

7 从质量作用原理到路径积分

量子力学的路径积分表述是一个从经典力学里的作用量原理延伸出来对量子物理的一种概括和公式化的方法。它以包括两点间所有路径的和或

泛函积分而得到的量子幅来取代经典力学里的单一路径。路径积分表述是理论物理学家理查德·费曼在 1948 年正式发表出来 [41]，在此之前狄拉克 1933 年的论文 [42] 里已经有了主要的思想和一些早期结果。路径积分表述的主要优势是把时间和空间等同处理，从而容易推广到相对论的情形，在现代量子场论中得到非常广泛的应用。然而，质量作用原理的基本假设告诉我们，每一次时空对于粒子的作用都可以看成是一个独立的路径。每个独立路径的权重和能量的分布相关。这本质上就是一个路径积分的过程。为了更清晰的理解这个概念，我们考虑如下的一个简单的特征过程。

假定粒子在时间段 Δt 内的随机运动的效应是从 A 点运动到 B 点。由质量作用原理，在此过程中，作用量的改变值可以是 $h, 2h, 3h, \dots$ ，但是相应于每一个特定的作用量改变，其路径是不一样的。比如最小的作用量改变，即 h ，相应于从 A 到 B 的运动，而 $2h$ 的改变则相应于折线的运动，这期间粒子被时空子撞击了 2 次。以此类推。这种图景下，自然的排除了所谓的红外效应，也就是在 Δt 内不能完成一次作用的过程。同样也排除了无穷大的作用，这是因为在某个上限粒子的瞬时速度已经超过光速。

我们看到，在质量作用原理的框架下，粒子的量子性质根源于本质上都是对于其随机运动的统计描述所呈现出来的性质。

7.1 自由粒子路径积分和时空扩散系数

自由粒子在时空中做随机时空运动，我们已经论证了其真实速度满足三速度分解：

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{x}, t) + \vec{u}(\vec{x}, t) + \vec{v}(t) \quad (7.1)$$

其中有两个运动学变量，经典速度 \vec{v} 和量子包络速度 \vec{u} 。其运动学方程将为下面一组耦合非线性的偏微分方程组：

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\mathfrak{R} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla (\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \mathfrak{R} \nabla^2 \vec{u} \quad (7.3)$$

设 $\Psi = e^{R+iI}$, 我们现在是面临的是一个初值问题, 即给定 $\vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}_0(\vec{x}), \vec{v}(\vec{x}, 0) = \vec{v}_0(\vec{x})$ 求解 $\vec{u}(\vec{x}, t), \vec{v}(\vec{x}, t)$. 求解这样复杂的非线性偏微分方程组, 必须先把它线性化 [23, 24, 25]。其中我们令

$$\nabla R = \frac{1}{2\mathfrak{K}} \vec{u} \quad (7.4)$$

$$\nabla I = \frac{1}{2\mathfrak{K}} \vec{v} \quad (7.5)$$

我们将得到

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\mathfrak{K} \nabla^2 \Psi \quad (7.6)$$

在一个无穷小的时间间隔 ϵ , 这个线性方程的解可以写为积分的形式

$$\Psi(x, t + \epsilon) = \int G(x, y, \epsilon) \Psi(y, t) dy \quad (7.7)$$

表示经过 ϵ 时间粒子从 y 处运动到 x 处的线性叠加。费曼的关键猜测, 也就是路径积分的原理, 就是假设权重因子 $G(x, y, \epsilon)$ 正比与 $e^{iS(x, y, \epsilon)/\hbar}$. 其中 $S(x, y, \epsilon)$ 为粒子经过 ϵ 时间从 y 处运动到 x 处的经典作用量, 即其拉格朗日量对时间的积分:

$$S(x, y, \epsilon) = \int L(x, y, \epsilon) dt = \int (K - U) dt = (\bar{K} - \bar{U})\epsilon \quad (7.8)$$

\bar{K} 为粒子的平均动能, \bar{U} 为粒子的平均势能。

要证明费曼的路径积分原理和随机时空运动相互等价, 必须能够从路径积分的基本假设 $G(x, y, \epsilon) = A e^{iS(x, y, \epsilon)/\hbar}$, 推导出基本运动学方程组。对于自由粒子, 显然有 $\bar{U} = 0, \bar{L} = \frac{m}{2} (\frac{x-y}{\epsilon})^2, S = \frac{m(x-y)^2}{2\epsilon}$, 即由路径积分原理有

$$\Psi(x, t + \epsilon) = A \int e^{\frac{im(x-y)^2}{2\hbar\epsilon}} \Psi(y, t) dy \quad (7.9)$$

令 $y - x = \xi, \alpha = -\frac{im}{2\hbar\epsilon}$, 可写为

$$\begin{aligned} \Psi(x, t + \epsilon) &= A \int e^{-\alpha\xi^2} \Psi(x + \xi, t) d\xi \quad (7.10) \\ &= A \int e^{-\alpha\xi^2} (\Psi(x, t) + \xi \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\xi^3)) d\xi \end{aligned}$$

利用积分性质

$$\int e^{-\alpha\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (7.11)$$

$$\int e^{-\alpha\xi^2} \xi d\xi = 0 \quad (7.12)$$

$$\int e^{-\alpha\xi^2} \xi^2 d\xi = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (7.13)$$

代入可得到

$$\Psi(x, t + \epsilon) = A \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \Psi(x, t) + \frac{1}{4\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + O(\alpha^{-\frac{5}{2}}) \right) \quad (7.14)$$

取比例系数 $A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$, 取 ϵ 趋于零的极限, 我们可以得到

$$\Psi(x, t + \epsilon) - \Psi(x, t) = \epsilon \partial_t \Psi(x, t) = \frac{1}{4\alpha} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (7.15)$$

从积分的性质可以看出, 最大贡献来自于间隔 $y - x = \xi \propto \sqrt{\epsilon}$ 的部分, 即粒子的速度为 $\frac{y-x}{\epsilon} \propto \sqrt{\frac{\hbar}{m\epsilon}}$, 在 ϵ 趋于零的极限下速度发散。粒子的路径是连续的, 但处处不可微。所以在路径积分的物理图景里面, 粒子的运动和布朗运动的特质非常相似。利用三维空间各向同性, 容易得到

$$\partial_t \Psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\alpha\epsilon} \nabla^2 \Psi(\vec{x}, t) \quad (7.16)$$

对比方程 (7.6), 如果要求路径积分原理和随机时空运动相互等价, 必须有

$$i\mathfrak{K} = \frac{1}{4\alpha\epsilon} \quad (7.17)$$

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{4i\alpha\epsilon} = \frac{1}{4i(-\frac{im}{2\hbar\epsilon})\epsilon} = \frac{\hbar}{2m} \quad (7.18)$$

必须注意到, 由随机时空运动导出的方程组 (7.5) 中, \mathfrak{K} 只是一个自由参数。但是如果要求此方程组和路径积分的原理相自洽, 必然导出 $\mathfrak{K} = \frac{\hbar}{2m}$ 。需要补充说明的是, 在任何有限的时间间隔里, 都可以分割为无穷小时间间隔 ϵ , 然后再进行积分, 就是所谓的历史求和或者叫路径积分。在有外势 U 的情形下面, 证明的方法和以上相同。

7.2 势场中粒子的路径积分表述和质量作用原理

对于处在外势 U 粒子, 经过 ϵ 时间粒子从 y 处运动到 x 处, 我们有 $\bar{U} = U(\frac{x+y}{2})$, $\bar{L} = \frac{m}{2}(\frac{x-y}{\epsilon})^2$, 即粒子的作用量为

$$S = \frac{m(x-y)^2}{2\epsilon} - U(\frac{x+y}{2})\epsilon \quad (7.19)$$

由路径积分原理, 必须满足

$$\Psi(x, t + \epsilon) = A \int e^{\frac{im(x-y)^2}{2\hbar\epsilon} - \frac{iU(\frac{x+y}{2})\epsilon}{\hbar}} \Psi(y, t) dy = A \int e^{\frac{im(x-y)^2}{2\hbar\epsilon}} (1 - \frac{iU(\frac{x+y}{2})\epsilon}{\hbar}) \Psi(y, t) dy \quad (7.20)$$

利用前一节的变量代换, 我们注意到在 ϵ 的最低阶有

$$U(\frac{x+y}{2})\epsilon = U(x + \frac{\xi}{2})\epsilon = U(x)\epsilon \quad (7.21)$$

$$\Psi(x, t + \epsilon) = A \int e^{-\alpha\xi^2} (1 - \frac{iU(x)\epsilon}{\hbar}) \Psi(x + \xi, t) d\xi \quad (7.22)$$

利用前一节的积分性质对 ξ 进行积分, 可以得到

$$\Psi(x, t + \epsilon) = A(1 - \frac{iU(x)\epsilon}{\hbar}) \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \Psi(x, t) + A \frac{1}{4\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (7.23)$$

令比例系数 $A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$, 取 ϵ 趋于零的极限, 并且利用空间的各向同性, 我们可以得到

$$\partial_t \Psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\alpha\epsilon} \nabla^2 \Psi(\vec{x}, t) + \frac{1}{i\hbar} U \Psi(\vec{x}, t) \quad (7.24)$$

同自由粒子的情况相自洽, 我们取时空扩散系数 $\mathfrak{K} = \frac{\hbar}{2m}$, 即有

$$\partial_t \Psi(\vec{x}, t) = i\mathfrak{K} \nabla^2 \Psi(\vec{x}, t) + \frac{1}{i\hbar} U \Psi(\vec{x}, t) \quad (7.25)$$

此即为在质量作用原理图景下粒子的运动方程。

8 光子的时空子涡旋起源

8.1 现代物理框架下的电荷基本属性

在现代物理学的框架下，电荷是粒子的基本属性。基本电荷被定义为电子或者正电子的带电量。电荷具有五个基本的属性：1. 只存在两种电荷，即正负电荷。刻画电荷的量子数是 1 或者-1，分别对应于正电荷和电荷。2. 同种电荷相互排斥，异种电荷相互吸引。3. 电荷之间的相互作用力是库伦力，满足距离的平方反比律。正负电荷会彼此湮灭成光子。4. 电荷不能被创造也不能被消灭。在一个与外界没有电荷交换的系统中，电荷的代数和总是保持不变。5. 一个基本电荷的电荷量为 $1.6 \times 10^{-19}\text{C}$ 。

再探时空子动力学

由于时空子本身不存在自相互作用，时空子的可微部分的动力学是一个无势能的标量场理论，即

$$\mathcal{L}_{ST} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \quad (8.1)$$

它的动力学方程就是 3+1 维的克莱因-高登方程，即

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0 \quad (8.2)$$

自由的时空子的波函数就是一个 3+1 维的波动解

$$\phi(\vec{x}, t) = \sum_{E^2 = \sum_{i=1}^3 p_i^2} f(E, \vec{p}) \exp(iEt - i\vec{p} \cdot \vec{x}) \quad (8.3)$$

其中 $f(E, \vec{p})$ 是动量空间中的解析函数。

我们在时空中放入粒子，就如同在平静的湖面上投入了一个石子，会带来影响这个湖面的层层涟漪。粒子对于时空的反作用反映在时空子的扰动不再是微扰，而是一个强扰动。相应的时空子的动力学也不再是自由时空子。这样的强扰动可以带给时空子一个强势能。不同的势能形态会让时

空子的动力学不同。对时空子而言，一般的微扰效应很快就被时空子本身的涨落效应，即其噪声抹平。只有某些强扰动会产生物理上的可观测效应，这些扰动就是非微扰孤子解。在质量作用原理框架下，时空子是表征能量的局域激发的粒子。当时空中局域能量发生非微扰效应时，时空子相应的也会有非微扰的孤子构型，也即时空子团簇效应。

8.2 2+1 维复标量时空子场

在现代量子场论中，一个重要的观点是微观能量可以是非守恒的，它可以涨落而生成正负粒子对。在质量作用原理框架下，时空能量的涨落本身就是时空子。时空局域能量非守恒，其实应该理解为局域时空子数量不守恒。但全局来看，时空子的能量是守恒的。在质量作用原理框架内，我们引入了局域的时空子场的伴随场，它可以和时空子场相互作用。但在大尺度上，时空子与其伴随场脱耦合，所以时空子作为自由粒子的图景在大尺度上得以恢复。这恰恰说明时空子存在某种局域对称性，这种对称性在大尺度是破缺的。实质上，当局域对称性为 $U(1)$ 时，时空子就是一个复标量场的激发。

在质量作用原理的框架下，粒子在时空子的碰撞下做布朗运动，本质上是一个马尔可夫过程。这说明粒子的历史和未来是因果上不相关的。因此在任意时刻，我们可以取一个垂直于粒子运动方向的切片。粒子的动力学可以看作束缚于这个法平面 2+1 维的时空切片上的动力学。这个 2+1 维的时空切片中有两种动力学，一种是粒子的动力学，另一种则是时空子的动力学。

我们现在考虑 2+1 维时空子场的动力学。如前所述，2+1 维时空切片上的时空子动力学如同一个平静的湖面，当粒子落入这个湖面时，会激荡起时空子的涟漪。这个涟漪本身是一个周期函数。在拉格朗日量中，它就表现为粒子对于时空的反作用场 $V(\phi, \phi^*)$ 。因此时空子复标量场的基本作用量就是

$$\mathcal{L}_{ST} = \frac{1}{2} \partial_j \phi \partial^j \phi^* + V(\phi, \phi^*), \quad j = 0, 1, 2 \quad (8.4)$$

8.3 Abrikosov-Nielsen-Olesen-Zumino 涡旋

ANOZ 涡旋态是 2+1 维时空上的标量场非微扰解。相应的拉格朗日量为

$$\mathcal{L} = \partial_i \phi^* \partial^i \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi - F^2)^2 \quad (8.5)$$

势能低点在

$$\phi = F \cdot e^{i\varphi}$$

处，它是二维空间平面上的半径为 F 的圈。这样的场构型恰好反映了粒子放在时空中对周围时空的影响。对应时空子场中的涟漪，势能项实际上几何上就是一个圆，它反映了时空子场涟漪的 $U(1)$ 对称性。这个拉氏量的孤子解处在 2+1 维时空的空间无穷远处，满足边界条件：

$$|x| \rightarrow \infty : \quad \vec{\phi} \rightarrow F \frac{\vec{x}}{|x|}, \quad \phi \rightarrow F e^{i\varphi} \quad (8.6)$$

但是這樣的解的能量

$$E = \int d^2x (\vec{\partial}\phi^* \vec{\partial}\phi + V(\phi, \phi^*)) \quad (8.7)$$

却是发散的。这是因为

$$\begin{aligned} |x| \rightarrow \infty : \quad \partial_i \phi_j &\rightarrow \frac{F}{|x|} \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right) \\ \sum_{i,j=1}^2 (\partial_i \phi_j)^2 &\rightarrow \frac{F^2}{|x|^2} \\ \int d^2x \vec{\partial}\phi^* \vec{\partial}\phi &\rightarrow 2\pi \int_0^\infty d|x| \frac{F^2}{|x|} : \quad \text{Log 发散} \end{aligned} \quad (8.8)$$

由此可以看出，涡旋孤子解在空间无穷远处的能量是发散的。对于时空子而言，这意味着在空间无穷远处有一个无穷大能量的能量源。这是不符合物理的。为了消除这个发散，一个简单有效的办法是让这无穷大的能量分布在整个时空中。这意味着我们需要引入一个局域规范场。实质上，在质量作用原理框架下，局域能量的不守恒说明这个局域规范场从一开始就需要

引入。为此，我们需要把局域的导数变为协变导数，同时引入规范场的运动学项，拉格朗日量此时就变成

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}D_\mu\phi^*D^\mu\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\phi, \phi^*) \quad (8.9)$$

$$D_\mu\phi = \partial_\mu - igA_\mu \quad (8.10)$$

在质量作用原理框架下，时空子标量场在空间无穷远处的显现为实标量场。这是因为复标量场体现的是时空子的量子属性，而在空间无穷远处，量子属性已经被极端压低，此时复标量场自动退化为实标量场。即

$$\phi \rightarrow Fe^{i\varphi}|_{\varphi=0} = F \quad (8.11)$$

此时时空子场的梯度

$$\vec{\partial}\phi = \left(\partial_r\phi\vec{e}_r + \partial_\varphi\phi\vec{e}_\varphi\right)_{\varphi=0} = iF/r \quad (8.12)$$

在空间无穷远处，规范场趋于纯规范（即规范等价于零的规范场），即

$$\vec{A} \rightarrow \frac{1}{ig}\phi^{-1}\vec{\partial}\phi \quad (8.13)$$

用极坐标分量形式可以写成

$$A_r = 0, \quad A_\varphi = \frac{1}{gr} \quad (8.14)$$

在一般情形下，在任意空间位置，我们不能让复标量场直接等价于实标量场。但事实上，在空间任何一点都可以通过规范变换来得到一个实标量场，即

$$\phi \rightarrow \Omega F, \quad \Omega(\vec{x}) = e^{i\varphi(\vec{x})} \quad (8.15)$$

此时，

$$\vec{A} \rightarrow -\frac{1}{ig}\Omega\vec{\partial}\Omega^{-1} \quad (8.16)$$

事实上，在这种一般构造下，时空子的运动学发散会被严格消去，即

$$\vec{D}\phi \rightarrow \left(\vec{\partial}\Omega + \Omega(\vec{\partial}\Omega^{-1})\Omega\right)F = \Omega\vec{\partial}(\Omega^{-1}\Omega)F = 0 \quad (8.17)$$

用分量形式，如 (8.16) 的规范场 \vec{A} 可以写成

$$A_i = -\frac{1}{g}\epsilon_{ij}\frac{x_j}{r^2} \quad (8.18)$$

由斯托克斯定理

$$\Phi \equiv \oint_{C=n\cdot\partial\Sigma} \vec{A}d\vec{x} = \int_{\Sigma} \vec{B}d\vec{\sigma} = \frac{2\pi n}{g} \equiv g_m \quad (8.19)$$

由此我们可以知道，只要存在 ANOZ 涡旋解，那么规范相互作用的荷就满足狄拉克量子化条件 [42]，即

$$g \cdot g_m = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (8.20)$$

这意味着只要存在 ANOZ 涡旋解，电荷就是量子化的。当 n 为负整数时，对应的是涡旋的旋向反向（意味着电荷反向）。在现代物理框架下，电荷量子化是由于存在磁单极子解。但在质量作用原理框架下，电荷量子化是 ANOZ 涡旋态的自然推论，并不需要引入磁单极子。因此时空场是电荷量子化的起源。

8.4 从 2+1 维到 3+1 维时空

在 3+1 维闵氏时空中，局域时空对称性为洛伦兹群 $SO(3,1)$ 。李群理论里， $SO(3,1)$ 与直积群 $SU(2) \times SU(2)$ 李代数同构，即

$$so(3,1) \cong su(2) \times su(2) \cong so(3) \times so(3). \quad (8.21)$$

实际上，这说明至少从局域来看，3+1 维的时空看上去像是两个三维时空的交叠扩张。

现在我们从代数上，我们来仔细观察这种局域的维度扩张是如何实现的。注意到洛伦兹群的六个生成元可以明显写成

$$K_i \equiv L_{0i} = t\partial_i - x_i\partial_t \quad i, j, k \in [1, 2, 3] \quad (8.22)$$

$$R_k = \epsilon_k^{ij}L_{ij} = \epsilon_k^{ij}x_i\partial_j \quad (8.23)$$

而 $su(2)$ 李代数则与 $so(3)$ 同构，写成微分算子形式，它表现为

$$S_a = \epsilon^{abc} r_a \partial_{r_b} \quad (8.24)$$

$$\tilde{S}_a = \epsilon^{abc} l_a \partial_{l_b} \quad (8.25)$$

两个 $su(2)$ 对应于 6 个维度，即

$$r_1, r_2, r_3, \quad l_1, l_2, l_3$$

所以虽然代数上洛伦兹群和双 $SU(2)$ 直积群是同构的。但实际上从忠实表示来看，这两者并不一致。注意到在洛伦兹群中，代数存在一种隐含的对偶性，它将 2 维平面映射为对应的 1+1 维法平面。即

$$\begin{aligned} \star : e_0 \otimes e_i &\rightarrow \epsilon_{0i}^{jk} e_j \otimes e_k \\ \star : e_j \otimes e_k &\rightarrow \epsilon_{jk}^{0i} e_0 \otimes e_i \end{aligned} \quad (8.26)$$

这种对偶性与微分几何中的 Hodge 对偶是非常类似的。它实际上规定了从 2+1 维到 3+1 维时空扩张必须遵从的规则。

由此，我们可以知道，如果理论被定义在 3+1 维闵氏时空的一个 2+1 维截面上，那么将它扩张到 3+1 维的原则就是遵从 Hodge 对偶原则。在我们研究的涡旋解的过程中，这个对偶事实上对应于一个重构操作。对于一个 2+1 维涡旋来说，它的涡管截面是一个二维平面，几何上等价于一个圆盘。但趋于涡旋中心时，这个截面圆盘趋于奇点。要使得这个奇点在几何上被重构修复，需要引入一个有限大小的球体。这相当于是说让涡旋圆盘平面在额外的第三空间维旋转成一个球。这个过程就相当于引入了上述的 Hodge 对偶性的物理操作。

8.5 光子的 ANOZ 涡旋起源

在 ANOZ 涡旋态的讨论中，我们得到了涡旋态的规范约束以及规范荷的量子化条件，并没有考虑涡旋态的动力学。涡旋态本身是时空子的集体激发，因此不是基本的场。它的动力学不能通过基本时空子场的动力学来解析得到。因此为了明显得到涡旋态的动力学，我们需要得到一个关于涡旋态的拉格朗日量。

8.5.1 法平面动力学

对于时空子复标量场的运动学部分，即，

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \vec{D}_i \phi^* \vec{D}^i \phi = \frac{1}{2} |(\partial_i - igA_i)\phi|^2 \quad (8.27)$$

在本小节中， $i, j, k, l, m, n = 0, 1, 2$ 标记粒子运动法平面上的动力学。我们只考虑涡旋势附近的激发，即， $\phi = Fe^{i\varphi}$ 。上式可以写为

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} F^2 (\partial_i \varphi - gA_i)^2 \quad (8.28)$$

这个拉氏量可以做平方配比转化为一个一次形式，即

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2F^2} \xi^i \xi_i + \xi_i (\partial^i \varphi - gA^i) \quad (8.29)$$

其中 ξ^i 是一个无动力学的辅助场。注意到，对于涡旋解而言， φ 作为标量场的相位是奇异的。因此我们需要将它分解为光滑部分 φ_0 和涡旋部分 φ_{vortex} ，即

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{vortex} \quad (8.30)$$

由于我们并不想要研究光滑相角（非涡旋解）的动力学，所以我们首先需要将光滑相角的贡献从拉氏量中积掉。通过欧拉-拉格朗日运动方程，我们得到了辅助场的约束方程

$$\partial_i \xi^i = 0 \quad (8.31)$$

这个方程实际上说明 ξ^i 是一个 (2+1) 维的无源场。由斯托克斯定理，可知它可以写成一个纯旋度，即

$$\xi^i = \epsilon^{ijk} \partial_j a_k \quad (8.32)$$

另一方面，辅助场 ξ^i 的动力学也可以通过欧拉-拉格朗日方程得到，即：

$$\xi^i = F^2 (\partial^i \varphi - gA^i) \quad (8.33)$$

上面的两个式子事实上定义了一个隐藏的对偶性，即

$$F^2 (\partial^i \varphi - gA^i) = \epsilon^{ijk} \partial_j a_k \quad (8.34)$$

将它代入到 (8.29) 中，我们可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\phi &= \frac{1}{2F^2} \xi^i \xi_i = \frac{1}{2F^2} \epsilon^{ijk} \partial_j a_k \epsilon_{imn} \partial^m a^n \\ &= \frac{1}{2F^2} f^{jk} f_{jk}\end{aligned}\quad (8.35)$$

其中

$$f_{jk} = \partial_j a_k - \partial_k a_j \quad (8.36)$$

为 a 场的场强。我们看到，时空子场的动力学完全等价于一个矢量场，即 a 场的运动学。我们将规范场 A 的运动学部分补齐，那么总的拉氏量就可以写成

$$\mathcal{L}_{total} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{4g^2} F^{jk} F_{jk} + \frac{1}{2F^2} f^{jk} f_{jk} \quad (8.37)$$

8.5.2 Hodge 对偶

在 2+1 维法平面上，粒子的动力学是被约束在平面上的。但是我们从 (8.34) 可以看到，相位角 φ 的动力学实际上等价于一个规范场 a 的运动学。注意到在 2+1 维的涡旋动力学中，所有的奇异性质都是相角的奇异性引发的。这导致伴随的规范场在涡旋中心处也是奇异的。为了消除奇异性，我们可以将 2+1 维霍奇对偶关系 (8.34) 延拓到 3+1 维。这种 3+1 维的 Hodge 对偶反映了前文揭示的 3+1 维洛伦兹群的局域对偶性。在 3+1 维，复时空子场变为实标量场，因为此时我们将相角固定到 0，所以它根本没有任何动力学。由此导致在 3+1 维只有自由的实标量时空子场。在 3+1 维里，我们可以定义 a 场的 Hodge 对偶为

$$F'^{\alpha\beta} = \sqrt{2g} F i \epsilon^{\alpha\beta}_{ij} f^{ij} \quad (8.38)$$

由此定义了一个规范场 A' ，

$$F'^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A'^\beta - \partial^\beta A'^\alpha \quad (8.39)$$

它在 3+1 维的任意 2+1 维子流形上的动力学都等价于 2+1 维子流形的 a 场动力学。由此，我们知道

$$\mathcal{L}_{total} = -\frac{1}{4g^2} F^{jk} F_{jk} - \frac{1}{4g^2} F'^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta} \quad (8.40)$$

实际上, 这两个部分在 3+1 维完全可以合成一项, 只需要定义新的 \tilde{A} 满足

$$\frac{1}{g}\tilde{F}_{ij} = F_{ij}, \quad \frac{1}{g}\tilde{F}_{\alpha\beta} = F'_{\alpha\beta} \quad (8.41)$$

注意上式实际上是六个方程, 将它写成分量形式就是

$$\partial_0\tilde{A}_1 - \partial_1\tilde{A}_0 = g(\partial_0A_1 - \partial_1A_0) \quad (8.42)$$

$$\partial_0\tilde{A}_2 - \partial_2\tilde{A}_0 = g(\partial_0A_2 - \partial_2A_0) \quad (8.43)$$

$$\partial_1\tilde{A}_2 - \partial_2\tilde{A}_1 = g(\partial_1A_2 - \partial_2A_1) \quad (8.44)$$

$$\partial_0\tilde{A}_3 - \partial_3\tilde{A}_0 = g(\partial_0A'_3 - \partial_3A'_0) \quad (8.45)$$

$$\partial_1\tilde{A}_3 - \partial_3\tilde{A}_1 = g(\partial_1A'_3 - \partial_3A'_1) \quad (8.46)$$

$$\partial_2\tilde{A}_3 - \partial_3\tilde{A}_2 = g(\partial_2A'_3 - \partial_3A'_2) \quad (8.47)$$

在 0-1-2 法平面上, 我们可以假定

$$\tilde{A}_0|_{\Sigma=(t,x_1,x_2)} = gA_0, \quad \tilde{A}_1|_{\Sigma=(t,x_1,x_2)} = gA_1, \quad \tilde{A}_2|_{\Sigma=(t,x_1,x_2)} = gA_2 \quad (8.48)$$

其中 $\tilde{A}_i|_{\Sigma=(t,x_1,x_2)}$ 表示四维时空中的规范场约束到法平面 $\Sigma = (t, x_1, x_2, 0)$ 的函数形式。那么由 (8.45-8.47) 我们可以知道, 只要 A_0, A_1, A_2 的关于 x_3 的函数与 A'_0, A'_1, A'_2 相一致, 即

$$A_i(0, 0, 0, x_3) = A'_i(0, 0, 0, x_3), \quad i = 0, 1, 2 \quad (8.49)$$

那么就可以得到

$$\tilde{A}_3(t, x_1, x_2, x_3) = gA'_3(t, x_1, x_2, x_3) \quad (8.50)$$

实际上, 由于 A'_3 本身就是由于 Hodge 对偶新出现的矢量场分量, 在最多相差一个场强为零的纯规范下, 它事实上是唯一的。因此, 我们可以得到一个简单的解

$$\tilde{A}_i(t, x_1, x_2, x_3) = g(A_i(t, x_1, x_2, 0) + A'_i(0, 0, 0, x_3)), \quad i = 0, 1, 2 \quad (8.51)$$

$$\tilde{A}_i(t, x_1, x_2, x_3) = gA'_3(t, x_1, x_2, x_3) \quad (8.52)$$

至此，我们完成了规范场从 2+1 维到 3+1 维的维度扩张，在此扩张下，我们可以得到

$$\mathcal{L}_{3+1d}^{eff} = -\frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (8.53)$$

它恰好就对应于 3+1 维的麦克斯韦场强。用 3 维场强写下， $\tilde{F}_{\mu\nu}$ 可以表示为

$$E_i = \tilde{F}_{0i}, \quad B_i = \epsilon_{ijk}\tilde{F}^{jk}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (8.54)$$

在上面的推导中，我们看到，ANOZ 涡旋的动力学效应完全等价于电磁场的运动学。这说明，光子实际上就是伴随着 ANOZ 涡旋出现的。由此可见，在 3+1 维的渐近几何下，ANOZ 涡旋的奇异性消除就自然衍生出麦克斯韦场强。

我们由此可以得到结论，当引入第三空间维后，涡旋的奇异性被消除。而运动方程则变为 3+1 维的 Maxwell 方程。它就是 maxwell 方程组

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (8.55)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.56)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8.57)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (8.58)$$

之所以仅仅只是无源电磁场的运动方程，是因为目前我们没有考虑物质场的动力学。我们将考虑物质粒子的引入的情况。

8.6 库伦力

我们现在考虑物质粒子之间的相互作用。在流体力学中，如果两个涡旋的旋向是相同的（相反的），那么它们之间互相排斥（吸引）。这是伯努利原理的自然推论。对于 2+1 维涡旋而言，仅存在两种不同的手性，即左手和右手手性。

早在二十多年前，人们已经发现了流体力学运动方程和 Maxwell 运动方程的一致性 [61]。这在 [63] 的论文中得到了进一步的详细的证明。但是在前人的工作中，这种流体-电磁对应仍然可以看作是一个巧合。而在时空子的涡旋表述下，这个流体-电磁对应猜想有了理论上的支持。我们可以从时空子涡旋的特性中，找到电磁相互作用的根源。在前文中，我们只考虑了时空子和规范场的动力学。并没有考虑物质粒子和它们之间的相互作用。为了考虑物质粒子之间的相互作用，我们在拉氏量中引入物质场，即

$$\mathcal{L}_{total} = -\frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - i\bar{\psi}\gamma^\mu\tilde{D}_\mu\psi + m\bar{\psi}\psi \quad (8.59)$$

$$\tilde{D}_\mu \equiv \partial_\mu + ie\tilde{A}_\mu \quad (8.60)$$

尽管在上面的拉氏量中没有出现时空子涡旋，但这里的相互作用应当理解为时空子涡旋和物质粒子的一个有效表示。这是因为涡旋的动力学现在等价于 3+1 维规范场。除了涡旋和粒子的相互作用外，其他时空子和物质粒子的碰撞并不在本章的考虑范围内。尽管它们在研究物质粒子之间的引力是非常重要的。从全局的观点来看，时空子和规范场是脱耦合的，所以所有的局域动力学都被等价于 3+1 维规范场的动力学。注意到我们引入的拉氏量和量子电动力学的拉氏量是完全一致的。在标准的场论计算下，物质粒子的相互作用和量子电动力学得到的库伦相互作用将毫无二致。但在质量作用原理框架下，传递粒子相互作用的规范粒子，其本身并不是直接源自于物质粒子，而是源自于时空子的涡旋。这一点与现代量子场论有本质的不同。

定义四维电流

$$j^\mu \equiv i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (8.61)$$

我们可以看到，规范场和四维电流有一个耦合项，即 $eA_\mu j^\mu$ 。这个耦合项的

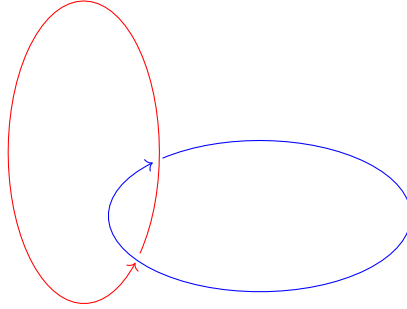


图 4: 光子看作 Hopf 链环

存在使得运动方程需要被改写，事实上，它就是有源电磁场方程，即

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = j_0 \quad (8.62)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.63)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8.64)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (8.65)$$

8.7 光子运动方程的另一种推导

至此，从 ANOZ 涡旋出发，我们至少可以得到电荷的四种属性：1. 只存在两种电荷，同荷相斥，异荷相吸。2. 电荷是量子化的。3. 电荷通过光子来传递相互作用。4. 电荷之间的作用力是库仑力

基于上节的计算和 Hodge 对偶的讨论，我们实际上已经知道光子的特点：它伴随着时空子的非微扰涡旋孤子解的出现而出现；它在 2+1 维法平面上表现为一个规范场，这个规范场和其 Hodge 对偶的场共同组成了 3+1 维的光子场。因此从数学上我们知道，3+1 维光子场实际上恰好可以表达为 2+1 维规范场的拓扑激发态，即 Hopf 链环态。我们来详细阐述这个结论。这样的结论对于解释零质量光子的自旋为 1 具有原则性的指导意义。

在时空子涡旋的框架下，涡管由两部分组成，其一是时空子场 ϕ 它的

梯度就表征涡管的流向。其二是 2+1 维规范场 A ，它的场强表征涡管的旋向。在 Hodge 对偶性下，时空子场的孤子部分的动力学等价于另一个规范场 A 的动力学。在拓扑学上，涡旋管代表一个威尔逊圈，它的霍奇对偶是特霍夫特圈。把它们放在一起就形成了著名的拓扑对象—Hopf 链环，如图 4 所示。Hopf 链环显然是一个非局部对象。Hopf 链环的拓扑稳定性保护了它，因此它可以在时空中传播而不会耗散，除非它遇到另一个涡旋。这与电磁相互作用中发生的情况非常相似，即光子传播电荷之间的相互作用。我们已经看到了 \tilde{A} ，也就是 A 和 A' 的联合表示，它满足的运动方程正是麦克斯韦方程。因而， \tilde{A} 场是霍普夫环的有效表示

至此我们论证了光子是两个互为霍奇对偶的 2+1 维规范场在 3+1 维中形成的拓扑 Hopf 链环。这两个拓扑圈恰好对应于 3+1 维左旋和右旋的拓扑圈表示。在我们考虑的情形下，一个左旋的拓扑圈对应于一个左旋的自旋纤维，而一个右旋的拓扑圈则对应于一个右旋的自旋纤维。物理上，并不存在真正拓扑的对象，所以我们需要考虑这个 Hopf 链环的动力学效应。任何一个拓扑圈的形变都将会影响整个 Hopf 链环。而一个拓扑 Hopf 链环的形变反映在纤维丛上就是一个自同构映射：

$$A : \Lambda_L \otimes \Lambda_R \rightarrow \Lambda_L \otimes \Lambda_R \quad (8.66)$$

映射 A 是丛 $\Lambda_L \otimes \Lambda_R$ 上的自同构映射。而 Λ_L 和 Λ_R 则表示左手旋量丛和右手旋量丛。在本文的附录 D 中，我们证明，这样的自同构映射只能是一个矢量映射。相应的，时空中任意的局域导数都要改变为协变导数，即

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu \quad (8.67)$$

这样构造出来的协变导数带来的结果是局域输运的非平庸性。也即李代数非平凡

$$[D_\mu, D_\nu] = D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (8.68)$$

这样的非平凡的局域输运恰恰就可以反映局域的同胚形变。这种形变的强度就由上式中的 g 来刻画，它对应于粒子的荷。因此我们可以说，电荷的

大小反映的是局域时空的拓扑子空间的形变的强度。上式的右边恰好和电磁场的四维场强定义一致，即

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (8.69)$$

由于

$$\begin{aligned} D^\mu [D_\mu, D_\nu] &= -ig\partial^\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - g^2 A^\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= ig\Box A_\nu + ig\partial_\nu (\partial^\mu A_\mu) - g^2 \partial_\mu (A^\mu A_\nu) + g^2 (\partial_\mu A^\mu) A_\nu \\ &\quad + \frac{1}{2} g^2 \partial_\nu (A_\mu A^\mu) \end{aligned} \quad (8.70)$$

在保持洛伦兹不变的规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 下，上式只有全微分的贡献，而全微分在无边界的自由场情形下一致为零。所以这个方程可以简单的写成

$$D^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (8.71)$$

写成三维的形式，它可以表示为：

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (8.72)$$

$$\partial_t E - \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad (8.73)$$

另一方面，由于 Hopf 链环的构型在左右对偶下形态不变，这将导致电磁场强 $F_{\mu\nu}$ 在电磁对偶下的运动方程不变。注意到两个拓扑圈分别对应于洛伦兹群的左手表示和右手表示。左右对偶意味着要让 $(0, i) \rightarrow (j, k)$ 指标转换，这在四维时空中可以用列维-西维塔联络来实现，也即

$$\epsilon^{0ijk} : (0, i) \rightarrow (j, k) \quad (8.74)$$

对于电磁场强，我们有如下的对偶关系

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} \quad (8.75)$$

列维-西维塔联络使得电磁场的地位互相对调，在三维标记下，上式对应于

$$\vec{E} \rightarrow \vec{B}, \quad \vec{B} \rightarrow -\vec{E} \quad (8.76)$$

在此对偶下，电磁场方程 (8.71) 的对偶方程就是

$$D_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (8.77)$$

写成三维形式就是

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.78)$$

$$\partial_t \vec{B} - \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (8.79)$$

方程 (8.72,8.73,8.78,8.79) 就是真空中电磁场的运动方程。这就证明了在质量作用原理的框架下，2+1 维规范场的 Hopf 链环的运动满足 Maxwell 运动方程，因此它就是 3+1 维的光子。

图 5 表明了一个形变如何从一个电子传播到正电子。其中红色上箭头代表左旋拓扑圈，绿色下箭头代表右旋拓扑圈。

8.8 光子和涡管

我们已经知道，在质量作用原理的框架下，物质粒子的自旋起源于时空子和它们的碰撞，这些碰撞导致粒子在局域时空中的拓扑圈转动。现在我们也知道光子可以表示为缠绕在 3+1 维局域时空的拓扑圈的 Hopf 链环。所以光子的自旋也可能起源于时空子。

在质量作用原理框架下，有质量粒子的自旋已经在上一节中得到了充分的阐述。电子和正电子分别围绕着洛伦兹群的拓扑子群 $U(1)_L$ 和 $U(1)_R$ 旋转。在任意时刻，电子具有一个拓扑的相位 φ_L ，而正电子具有拓扑相位 φ_R 。这两个相位是完全不确定的，也即，电子和正电子都具有一个相位对称性，即 $U(1)$ 对称性。由于这是局域洛伦兹群的拓扑子群诱导的对称性，因此该 $U(1)$ 对称性是一个局域的相位对称性，也就是规范对称性。

在 $U(1)$ 的参量为 θ 的局域变换下，粒子的全同性要求

$$\psi \rightarrow \psi e^{-i\varphi_L} \equiv \psi e^{-i\theta}, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\varphi_R} \equiv \bar{\psi} e^{i\theta} \quad (8.80)$$

由此可知

$$\varphi_L = -\varphi_R = \theta \quad (8.81)$$

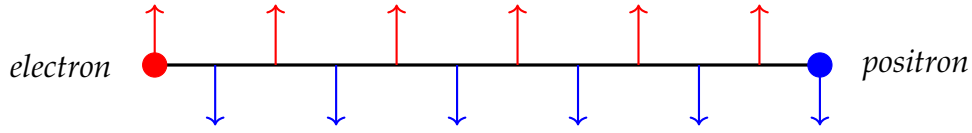


图 5: 光子传递电荷之间的相互作用

这说明这个 $U(1)$ 规范群是 $U(1)_L \times U(1)_R$ 的对角子群。它表示左手电子和右手正电子在各自的洛伦兹拓扑子群的变换下的参数通过整数-1 来传递。-1 这个整数就是相应的转移矩阵。这个概念可以拓展到参数的高维转换。如果左手粒子和右手反粒子的参数转移矩阵不是一个一维的数，而是一个纠缠矩阵，那么相应的规范群就不是 $U(1)$ 群，而是一个非阿贝尔群。

在这个图景中，光子的是 2+1 维规范场的 Hopf 链环，它没有获得任何质量。因此光子是一个无质量的粒子。但它带有时空子和电子的碰撞的信息，因此它会记录电子的运动，也就携带质量作用原理框架下的自旋的信息。从洛伦兹群的拓扑子群的分类来看，它属于 $(1, 1)$ 表示，因此是一个自旋为 1 的粒子。因此，从光子的 Hopf 链环假设出发，我们得到了它的自旋是 1，且质量为零。这事实上解释了无质量粒子的自旋的起源。

8.9 质量作用原理框架下的带电轻子代数

下面我们讨论标准模型中带电的轻子。考虑到 3 维空间中任意一点 O 都有三个互相垂直的 2 维平面。以 O 为坐标原点取平面直角坐标系，其中描述 2 维平面上具有涡旋解的 2+1 维拉氏量为：

$$L_a^{2+1} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \frac{\lambda_a}{2} (\phi \phi^* - F^2)^2 \quad (8.82)$$

其中 $a = 1, 2, 3$, 分别对应于 (x^0, x^2, x^3) , (x^0, x^1, x^3) , (x^0, x^1, x^2) 三维子空间； λ_a 是耦合常数，反映了势场的强弱，与物质粒子的质量密切相关。如果 $\lambda_a = 0$ 即 $V(x) = 0$ ，表明时空子不碰撞粒子，粒子不具有质量，此时涡旋解亦不存在。因此粒子的质量是粒子具有电荷的先决条件。引入规范场，考虑涡旋势

附近的激发, 由 (8.38) 式可得:

$$L_a^{2+1} = L_{\bar{A}} + L_\phi = -\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{4}f_{ij}f^{ij}, \quad (8.83)$$

在对应的子空间上取值。这里为记号简洁, 已将耦合常数取为 1。此时的拉氏量中已不含 λ_a , 与耦合常数无关, 从而与基本粒子的质量无关。下面通过 Hodge* 对偶, 把 2+1 维的理论提升到 3+1 维时空, 记 $F_{\alpha\beta} = i\epsilon_{\alpha\beta}^{ij}f_{ij}$ 。以 L_1^{2+1} 为例

$$L_1^{2+1} = -\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{4}f_{ij}f^{ij} \quad (8.84)$$

i, j 是源于子空间 (x^0, x^2, x^3) 的指标, $i, j = 0, 2, 3$, 对应的独立的场强分量为

$$F_{02}, F_{03}, F_{23}, f_{02}, f_{03}, f_{23}.$$

由 $F_{\alpha\beta} = i\epsilon_{\alpha\beta}^{ij}f_{ij}$ 可得:

$$\begin{cases} F_{\alpha\beta} = i\epsilon_{\alpha\beta}^{02}f_{02} \Rightarrow F_{13} = -if_{02} \\ F_{\alpha\beta} = i\epsilon_{\alpha\beta}^{03}f_{03} \Rightarrow F_{12} = if_{03} \\ F_{\alpha\beta} = i\epsilon_{\alpha\beta}^{23}f_{23} \Rightarrow F_{01} = -if_{23} \end{cases} \quad (8.85)$$

这里取用了通常的约定 $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, $\epsilon^{0123} = 1$ 。把 L_1^{2+1} 提升到 3+1 维时空, 有

$$\begin{aligned} L_1^{3+1} &= -\frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\tilde{F}_{ij}\tilde{F}^{ij} + \frac{1}{4}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{4}\tilde{F}_{ij}\tilde{F}^{ij} - \frac{1}{4}\tilde{f}_{ij}\tilde{f}^{ij} \end{aligned} \quad (8.86)$$

其中

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -i\tilde{f}_{23} & \tilde{F}_{02} & \tilde{F}_{03} \\ i\tilde{f}_{23} & 0 & i\tilde{f}_{03} & -i\tilde{f}_{02} \\ -\tilde{F}_{02} & -i\tilde{f}_{03} & 0 & \tilde{F}_{23} \\ -\tilde{F}_{03} & i\tilde{f}_{02} & -\tilde{F}_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (8.87)$$

同理，对应于 L_2^{2+1} ，

$$F_{\alpha\beta} = i\epsilon_{\alpha\beta}^{ij} f_{ij} \Rightarrow \begin{cases} F_{\alpha\beta} = i\epsilon_{\alpha\beta}^{01} f_{01} \Rightarrow F_{23} = if_{01} \\ F_{\alpha\beta} = i\epsilon_{\alpha\beta}^{03} f_{03} \Rightarrow F_{12} = if_{03} \\ F_{\alpha\beta} = i\epsilon_{\alpha\beta}^{13} f_{13} \Rightarrow F_{02} = if_{13} \end{cases} \quad (8.88)$$

$$\begin{aligned} L_2^{3+1} &= -\frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\tilde{F}_{ij}\tilde{F}^{ij} + \frac{1}{4}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{4}\tilde{F}_{ij}\tilde{F}^{ij} - \frac{1}{4}\tilde{f}_{ij}\tilde{f}^{ij} \end{aligned} \quad (8.89)$$

其中

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{F}_{01} & i\tilde{f}_{13} & \tilde{F}_{03} \\ -\tilde{F}_{01} & 0 & i\tilde{f}_{03} & \tilde{F}_{13} \\ -i\tilde{f}_{13} & -i\tilde{f}_{03} & 0 & i\tilde{f}_{01} \\ -\tilde{F}_{03} & -\tilde{F}_{13} & -i\tilde{f}_{01} & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.90)$$

对应于 L_3^{2+1} ，

$$F_{\alpha\beta} = i\epsilon_{\alpha\beta}^{ij} f_{ij} \Rightarrow \begin{cases} F_{\alpha\beta} = i\epsilon_{\alpha\beta}^{01} f_{01} \Rightarrow F_{23} = if_{01} \\ F_{\alpha\beta} = i\epsilon_{\alpha\beta}^{02} f_{02} \Rightarrow F_{13} = -if_{02} \\ F_{\alpha\beta} = i\epsilon_{\alpha\beta}^{12} f_{12} \Rightarrow F_{03} = -if_{12} \end{cases} \quad (8.91)$$

$$\begin{aligned} L_3^{3+1} &= -\frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\tilde{F}_{ij}\tilde{F}^{ij} + \frac{1}{4}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{4}\tilde{F}_{ij}\tilde{F}^{ij} - \frac{1}{4}\tilde{f}_{ij}\tilde{f}^{ij} \end{aligned} \quad (8.92)$$

其中

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{F}_{01} & \tilde{F}_{02} & -i\tilde{f}_{12} \\ -\tilde{F}_{01} & 0 & \tilde{F}_{12} & -i\tilde{f}_{02} \\ -\tilde{F}_{02} & -\tilde{F}_{12} & 0 & i\tilde{f}_{01} \\ i\tilde{f}_{12} & i\tilde{f}_{02} & -i\tilde{f}_{01} & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.93)$$

由此可知 3 个不同的 2+1 维的拉氏量 L_a^{2+1} 提升到 3+1 维时空得到

$$\begin{aligned} L_a^{3+1} &= -\frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\tilde{F}_{ij}\tilde{F}^{ij} + \frac{1}{4}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{4}\tilde{F}_{ij}\tilde{F}^{ij} - \frac{1}{4}\tilde{f}_{ij}\tilde{f}^{ij}, \end{aligned} \quad (8.94)$$

它们是同一个拉氏量，可以通过坐标轴的转动彼此转化，对应规范场 \vec{A}, \vec{a} 内部的转动：

$$L_1^{3+1} \leftarrow (\hat{e}_1 \leftrightarrow \hat{e}_2) \rightarrow L_2^{3+1} \leftarrow (\hat{e}_2 \leftrightarrow \hat{e}_3) \rightarrow L_3^{3+1} \quad (8.95)$$

因此对于 3+1 维时空中的描述基本点荷的电磁场，当我们追溯它的 2+1 维的起源时，它可能源于 3 个正交的两维平面中的任何一个，因此存在 3 个自由度，由 $\lambda_a, a = 1, 2, 3$ 来描写，由此可得基本粒子中带有基本电荷的轻子最多只能有 3 种。而我们知道 3+1 维时空中带电轻子有 3 种，他们具有不同的质量，与 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq 0$ 相对应。从时空子的角度看局域时空的各向同性被破坏。综上可知：在质量作用原理的框架内，带电轻子最多只能有三代，这与时空的维数是 4 维密切相关。

8.10 本章小结

在本章中，我们从质量作用原理的时空子图景出发，详细阐述了电磁相互作用的时空子起源。在质量作用原理的框架下，3+1 维电磁场实际上表现为 2+1 维法平面上的规范场及其 Hodge 对偶的 Hopf 链环。它是一个拓扑态。从这个拓扑态构型出发，我们可以从两种不同的方法得到电磁场的经典运动方程，即 Maxwell 运动方程。这个链环拓扑态结构也可以解释零质量的光子为何具有自旋为 1 的性质。

需要特别说明的是，在本章中，我们考虑的是物质粒子对周围时空的时空子的非微扰激发态效应。但是，并不意味着时空能量的非微扰效应只能由物质粒子来激发。在宇宙大爆炸早期，时空的能量扰动非常巨大，此时没有粒子也会导致时空子的非微扰效应。而我们在本节已经看出，时空子的非微扰效应将会诱导出电磁波。这说明在宇宙大爆炸的早期，将会是

一个以辐射为主的宇宙，这与当前的宇宙学理论是不谋而合的。而进一步，在黑洞周围的时空能量涨落也是非常巨大的，微扰效应已经不适用了。在黑洞周围同样会有辐射，这种辐射和霍金辐射的机制完全不同。但在质量作用原理的框架下，并不需要引入虚粒子对来解释黑洞的辐射效应。这实际上也为黑洞物理学提供了一个全新的研究方向。

最后并且最重要的是，我们推导了带电轻子的代的数目。这是一个全新的结果，是目前的量子场论框架中无法得到的结果。在质量作用原理的框架中，通过时空子的涡旋，带电轻子的代的数目可以被推断。

9 质量作用原理框架下带电粒子的辐射

在经典物理学中，原子的稳定存在有一个明显的困难。根据麦克斯韦电磁理论，加速电子以电磁波的形式辐射能量。绕原子核运行的电子不断加速，因此绕轨道运行的电子应该不断辐射能量，导致电子螺旋掉入原子核，稳定的原子将不复存在。

玻尔打破了经典物理学的说法，强行规定电子在围绕原子核加速时不会辐射光子。仅当电子从较高能级跃迁到较低能级时才会发生光辐射。从波尔模型以来一百多年，最初的疑难问题依然存在：电子在氢原子中运动，为什么不会对外辐射光子？根据经典电动力学，做加速运动的电子会辐射出电磁波，致使能量不断损失，而玻尔模型无法解释为什么处于定态中的电子不发出电磁辐射。

虽然波尔模型只是量子力学最初的尝试，但这个疑难问题，在后来量子力学成熟发展后的哥本哈根诠释中也被掩盖了。哥本哈根诠释对这个疑难的回答，包含着若干条相互关联但并不完全统一的纲领：

1. 波粒二象性。实验仪器探测到电子时，电子是一个局域性的粒子。实验仪器没有探测到电子时，电子是一个非局域性的波。因此不能谈论电子的速度和加速度。

2. 来自波恩规则的概率波，也是哥本哈根诠释的一个重要组成部分。它认为波粒二象性中的波不是真实的波动，而是概率幅的波动。如果是真

实的波动，那么电荷在空间会有一个分布，然而实验证明电荷是量子化的。

3. 不确定性关系。电子不能同时具有确定的速度和坐标。因此电子不具备运动轨迹，那么经典电动力学所预言的辐射自然就无从谈起。

以上的观点，原本只是哥本哈根学派的一家之言，后来慢慢演变为目前物理学界的主流解释。这个解释并没有真正从机理上解决电子在氢原子中运动不对外辐射光子的问题。根据本文中提出的质量作用原理，氢原子中电子的运动轨迹是真实存在的，具有真实的物理坐标和速度。电子作为真实的客体，在原子中做局域性的运动，必然不能保持直线匀速运动的状态，因此具有加速度。如何让电子既有加速度而又不辐射，这是本章研究的核心问题。

9.1 自由带电粒子的辐射

我们先来看一个任意运动的点电荷所产生的场

$$\phi = \frac{e}{R(1 - \frac{\vec{v} \cdot \hat{n}}{c})} \quad (9.1)$$

$$\vec{A} = \frac{e\vec{v}}{cR(1 - \frac{\vec{v} \cdot \hat{n}}{c})} \quad (9.2)$$

其中 $\vec{R} = R\hat{n}$ 是从电荷所在点到观察点的径矢， \vec{v} 是带电粒子的速度。如果是一个自由电子作布朗运动，因为时空子的随机碰撞是各向同性的。在质量作用原理框架下，一秒之内时空子撞击电子的平均次数为 10^{20} 次。也就是说，本文中由质量作用原理推导出来的理论，所探讨的典型时间尺度在 10^{-20} 秒。碰撞的间隔时间极短，在实验可测量的时间间隔 Δt 内，带电自由粒子的平均速度和平均加速度都为零

$$\langle \vec{v} \rangle = 0 \quad (9.3)$$

$$\langle \dot{\vec{v}} \rangle = 0 \quad (9.4)$$

以下我们把速度空间自由电子的径向几率分布记为 $\rho_f(v)$ ，其角分布是球对称的，区别于束缚态情况的几率分布 ρ_b 。记实验观察的时间为 t ，辐射发生的时间为 t' ，两者之间满足 $t' + \frac{R(t')}{c} = t$ 。注意到 $10^{-20}\text{s} \ll \Delta t \ll t - t'$ ，单次时空子碰撞导致的带电粒子位移远远小于 R ，因此可以忽略时间间隔 Δt 内电子的位移和单次碰撞的时间差，即认为时间间隔 Δt 内的多次碰撞是同时发生的。

根据电磁场的定义式：

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (9.5)$$

$$\vec{B} = \hat{n} \times \vec{E} \quad (9.6)$$

一个任意运动的点电荷所产生的辐射电场为：

$$\vec{E} = \frac{e}{c^2 R (1 - \frac{\vec{v} \cdot \hat{n}}{c})^3} \hat{n} \times ((\hat{n} - \frac{\vec{v}}{c}) \times \dot{\vec{v}}) \quad (9.7)$$

相应的辐射磁场为

$$\vec{B} = \hat{n} \times \vec{E} \quad (9.8)$$

由于几率分布的球对称性，不失一般性，取 z 轴沿着 \hat{n} 的方向，我们可以写出球坐标中的辐射电磁场为：

$$\begin{aligned} \vec{E} = \frac{e}{c^2 R (1 - \frac{v \cos \theta}{c})^3} & \left\{ \frac{d}{dt'} \left(\frac{v}{c} \cos \theta \right) (v \sin \theta \cos \phi \hat{e}_x + v \sin \theta \sin \phi \hat{e}_y) \right. \\ & \left. - (1 - \frac{v}{c} \cos \theta) \frac{d}{dt'} (v \sin \theta \cos \phi \hat{e}_x + v \sin \theta \sin \phi \hat{e}_y) \right\} \quad (9.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{B} = \frac{e}{c^3 R (1 - \frac{v \cos \theta}{c})^3} & \left\{ \frac{d}{dt'} \left(\frac{v}{c} \cos \theta \right) (v \sin \theta \cos \phi \hat{e}_y - v \sin \theta \sin \phi \hat{e}_x) \right. \\ & \left. - (1 - \frac{v}{c} \cos \theta) \frac{d}{dt'} (v \sin \theta \cos \phi \hat{e}_y - v \sin \theta \sin \phi \hat{e}_x) \right\} \quad (9.10) \end{aligned}$$

因此 Δt 时间内时空子的统计平均碰撞效应为:

$$\langle \vec{E} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int dv \vec{E} \rho_f(v) \quad (9.11)$$

$$\langle \vec{B} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dv \vec{B} \rho_f(v) \quad (9.12)$$

其中 $\rho_f(v)$ 是布朗运动的速度分布函数与时间无关, 即有:

$$\left\langle \frac{d}{dt'} (v \sin \theta \sin \phi \hat{e}_x - v \sin \theta \cos \phi \hat{e}_y) \right\rangle = \frac{d}{dt'} \left\langle \frac{(v \sin \theta \sin \phi \hat{e}_x - v \sin \theta \cos \phi \hat{e}_y)}{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^2} \right\rangle \quad (9.13)$$

因此可得:

$$\langle \vec{E} \rangle = \langle \vec{B} \rangle = 0 \quad (9.14)$$

由此, 我们证明了自由电子作布朗运动时不辐射电磁波。时空子单次碰撞产生的电磁场, 由于几率分布球对称性的存在而神奇的抵消了!

以上的证明有两个重要的意义:

1. 自由粒子在哥本哈根诠释中, 并不是在做匀速直线运动, 因为匀速直线运动有明确的轨道, 每一瞬间都有确定的动量和位置。换句话说, 哥本哈根诠释本身无法证明自由电子不辐射光子。

2. 麦克斯韦的电磁理论, 在微观世界依然成立。只有将电磁理论和布朗运动相结合, 才能证明自由电子不辐射光子。正是这个结合, 提供了量子力学的客观实在图景。

9.2 束缚态带电粒子的辐射

现在我们以氢原子中的电子为例子来研究。先讨论最重要的情况, 氢原子处于能量最低的状态 (基态)。当氢原子核外电子处于基态的时候, 电子绕原子核运动一周需要约 1.5×10^{-15} 秒。这个时间尺度依然比时空子碰

撞的时间尺度大了五个数量级。因此碰撞时间间隔极短，上一节的多次碰撞同时发生的假设依然成立。对于定态氢原子，电子束缚态的波函数为：

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (9.15)$$

电子径向位置的几率分布，即不管方向如何，在球壳 $(r, r + dr)$ 内找到电子的几率为：

$$r^2 dr \int d\Omega |\psi_{nlm}|^2 = \chi_{nl}^2(r) dr \quad (9.16)$$

电子的几率随角度的变化为：

$$|Y_{lm}(\theta, \phi)|^2 d\Omega \propto |P_l^m(\cos \theta)|^2 d\Omega \quad (9.17)$$

氢原子基态中电子的分布是球对称函数，即分布函数 $Y_0^0(\theta, \varphi)$ 与球坐标角度 θ 和 φ 都无关

$$Y_0^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \quad (9.18)$$

需要注意，尽管氢原子体系的哈密顿量具有球对称性，但只有 S 态的电子分布保持了这种对称性。这个证明实际上是普遍的，适用于任意能级的 S 态 ($l = 0$ 称为 S 态)，如 1S、2S、3S 等等。在任意 S 态上氢原子中电子的分布是球对称函数，同样有分布函数 $Y_0^0(\theta, \varphi)$ 与球坐标角度 θ 和 φ 都无关。通过傅立叶变换，我们可以求出动量空间的波函数

$$\begin{aligned} \Upsilon_{nlm}(P, \Theta, \Phi) = & \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm im\Phi} \right\} \left\{ \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}} P_l^m(\cos \Theta) \right\} \\ & \times \left\{ \frac{\pi 2^{2l+4} l!}{(\gamma \hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{n(n-l-1)!}{(n+l)!}} \frac{\zeta^l}{(\zeta^2+1)^{l+2}} C_{n-l-1}^{l+1} \left(\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (9.19)$$

其中 $\gamma = \frac{Z}{na_0}$, $\xi = \frac{p}{\hbar \gamma}$, a_0 为玻尔半径。对于氢原子 $Z = 1$ ，动量空间的几率密度为 $\rho_{nlm} = |\Upsilon_{nlm}(P, \Theta, \Phi)|^2$ 。对于任意一个 S 态，动量空间的几率密度化简为：

$$\rho_{n00} = |\Upsilon_{n00}(P, \Theta, \Phi)|^2 = \rho_{n00}(P) \quad (9.20)$$

可见，在任意一个 S 态，动量空间的几率分布都是球对称的。通过 $P = mv$ 可以得到速度空间的几率密度 $\rho_b(v)$ ，因为这个几率的角分布是球对称的，用上一节同样的方法可以得到：

$$\langle \vec{E} \rangle = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi |\Upsilon_0^0(\theta, \phi)|^2 \int_0^\infty dv \vec{E} \rho_b(v) = 0 \quad (9.21)$$

$$\langle \vec{B} \rangle = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi |\Upsilon_0^0(\theta, \phi)|^2 \int_0^\infty dv \vec{B} \rho_b(v) = 0 \quad (9.22)$$

由此我们证明了一个重要的结论，基态的电子不辐射光子，保证了基态的稳定性，电子不会连续辐射光子，最终掉进原子核中。

由此，我们证明了束缚态带电粒子处在任意一个 S 态上都不辐射电磁场。如果从经典物理的观点看，氢原子中的电子受到向心力的作用，必然做平面运动，不可能有球对称的分布。正是时空子的随机碰撞，使得电子等概率地分布在球面上，而且不同球面之间可以来回运动。从质量作用原理的框架看，氢原子中电子任意 S 态的存在，恰恰是时空子的客观实在性证明。

对于非 S 态的定态，电子动量空间的几率密度为 $\rho_{nlm} = |\Upsilon_{nlm}(P, \Theta, \Phi)|^2 = \rho_{nlm}(P, \Theta)$ ，通过 $P = mv$ 可以得到速度空间的几率密度 $\rho_b(v, \Theta)$ 。可见由于角动量的存在，速度几率角分布的球对称性被破坏，因此一般情况下观测点并不能取在 z 轴上。但是，根据对称性仍然可以将观测点取在 xoz 平面上。相应的计算要复杂得多，但我们相信在原子核的作用下 Δt 时间间隔，时空子多次碰撞产生的电磁场依然存在着类似的相互抵消，最终使得氢原子电子在任意定态上都不可以连续地辐射电磁波。

综上所述，我们从质量作用原理下时空子随机碰撞出发，论证了三个重要的结论：

1. 自由电子不辐射光子。
2. 氢原子中处于 S 态（基态为能量最低的 S 态）的电子不连续辐射光子。

3. 只有将电磁理论和布朗运动结合起来, 才能够完美解决微观带电粒子的辐射问题。

根据这三个结论, 我们从根本上解决了从波尔模型到哥本哈根诠释一直以来都无法真正解决的疑难问题, 从而构建出微观世界即原子内部的真实运动图景。

9.3 重新探讨哥本哈根诠释

自一个世纪前以来, 爱因斯坦-波尔关于量子力学的争论一直没有结束。爱因斯坦持物理实在论的观点, 认为一个完备的理论不仅可以用于解释和预测实验结果, 还必须描述物理世界的客观实在图景。爱因斯坦为此提出了 EPR 悖论来坚决反对量子力学的波函数已经是对物理实在完备的描述。而波尔及其领导的哥本哈根学派认为, 在实验测量之前, 物理世界的客观实在图景是不可能被任何理论所完备描述。举个著名的例子, 哥本哈根诠释认为在实验仪器探测电子之前, 我们甚至不可说电子是客观存在的。

爱因斯坦-波尔的争论长期以来一直停留在哲学或思想实验的层次, 直到贝尔不等式的精密实验结果的出现。实验结果确切无疑地违背了贝尔不等式, 从而否定了所有定域性隐变量理论替代量子力学的可能。这些实验看起来都是哥本哈根诠释的巨大胜利, 因此对哥本哈根诠释的批判逐渐成为现代物理学的禁区。

这个禁区掩盖了哥本哈根诠释本身无法弥补的漏洞, 本章所详细论述的带电粒子辐射问题正是一个代表性的例子。无论是自由电子还是束缚态中的电子, 哥本哈根诠释都无法正面回答一个问题: 不是做匀速直线运动的电子, 为什么不会连续辐射电磁波? 在我们看来, 这是一个非常严肃的、必须正面解决的难题。因为这个难题的背后, 正是微观世界客观实在图景的大问题: 在实验仪器探测电子之前, 电子究竟是如何运动? 这种运动一方面要与所有量子力学实验相吻合, 又要与电磁理论的预言不相违背。只有解决了这个大问题, 才能真正建立微观世界的唯物主义解释。

根据质量作用原理, 对所有的疑难我们给出了如下的正面回答:

1. 在实验仪器探测电子之前，自由电子做无摩擦的布朗运动。在实验仪器探测电子之前，即是说电子不受到任何人为实验因素的干扰，这是客观世界的本来面目。哥本哈根诠释认为不可以问也无法回答的问题，我们第一次给出了精确的答案。从这个答案出发，可以自然得到薛定谔方程、玻恩法则和海森堡不确定性原理一系列有根本重要性的结果。

2. 自由电子不会连续辐射电磁波，其原因正是时空子的高频随机碰撞，使得各个瞬时加速运动所辐射的电磁波之间相互抵消。如果不存在时空子，不存在时空子引起的电子布朗运动，自由电子必然会连续辐射电磁波，与实验结果有巨大的矛盾。

3. 氢原子中 S 态的电子不会连续辐射电磁波，因为 S 态的球对称形成恰恰是时空子的高频随机碰撞的结果。如果不存在时空子，电子在向心力的作用下只能做平面运动，不可能有球对称的分布。这个球对称分布结合布朗运动的特性，保证了氢原子中 S 态的电子各个瞬时加速运动所辐射的电磁波之间相互抵消。

4. 本章的分析逻辑上必然导致一个重大的结论：电磁理论在微观世界完全适用。微观带电粒子最底层的运动是纯粹经典的，经典电动力学可以准确描述，前提是时空子高频碰撞导致的布朗运动。不必像玻尔模型人为规定定态不辐射，而是通过布朗运动的特性来抵消各个瞬时产生的电磁辐射。我们必须强调，在微观世界不能规定经典物理自动失效，而是要从第一性原理出发深入分析。单单从实验上原子不辐射电磁波的稳定性，就得到经典电动力学不适用于微观粒子的结论，是不严谨并且是错误的。在质量作用原理的框架下，我们证明了麦克斯韦电磁理论在微观世界完全适用，自由带电粒子和氢原子 S 态电子并不辐射电磁波。

综上所述，本章中我们攻克了从玻尔模型开始就一直存在的大问题，为爱因斯坦-玻尔百年来的争论划下最终的句号。爱因斯坦认为波函数不可能是物理实在的完备描述，这个观点是正确的，因为时空子导致物质粒子的布朗运动才是物理实在的完备描述。但是，“上帝不掷骰子”——爱因斯坦之意是最基本层面上的物质世界行为不会是概率性的，这个观点是错误的。因为最底层客观实在的图景，正是物质粒子永不停歇的在做布朗运动，而

$$\alpha \text{ (crossing)} + \beta \text{ (crossing)} + \gamma \text{ (crossing)} = 0$$

图 6: skein relation

布朗运动的每一步都是概率性的，充满了偶然性。只有时空子的存在，才能呈现出微观粒子的概率性量子力学行为，同时构建出微观世界的客观实在图景。这就是本文所述唯物主义量子力学的真义。

10 费米子自旋的时空子涡旋起源

本节我们将进一步从时空子涡旋的拓扑结构中来探讨自旋的本质。

在 2+1 维法平面中，当引入规范场后，涡旋中心的奇点被重构为一个 S^1 。从微分几何的观点来看，这个 S^1 可以看作是涡旋这二维流形的边界。从 Hodge 对偶出发，我们可以得到这个 S^1 的对偶，实际上也是一个 S^1 。我们标记这个 S^1 为 S^{1*} 。那么在 3+1 维时空中， S^1 和 S^{1*} 最简单直观的拓扑结构就是直接互相嵌套。它就是 Hopf 链环结构。从扭结理论出发，我们知道在三维空间中， S^1 和 S^{1*} 实际上还存在更基本的连接方式。这背后的基本出发点就是绞关系 (skein relation)。绞关系可以用如下的图示 10 来表示。

一个 Hopf 链环实际上有两个互为镜像的绞点。数学上，双绞点的链环并不是 S^1 和 S^{1*} 所能构成的最基本的拓扑结构。最基本的双圈连接是单绞点连接。在时空子涡旋构型下，我们可以有如下的代数-纽结对应猜想：洛伦兹群的基本表示对应的是单绞点双圈相互对偶的涡旋的边界连接，而双绞点连接对应的是洛伦兹群的伴随表示。在这个框架下，洛伦兹群的代数表示论和纽结拓扑表示论有了深刻而清晰的联系。

但值得注意的是，这个猜想在数学上也是全新的。目前并没有直接的证明。但通过现有的表示论来间接验证这种猜想的途径也值得深入研究。比如可以通过仿射表示来连接彼此，即证明 Schur 多项式和 Jones 多项式之

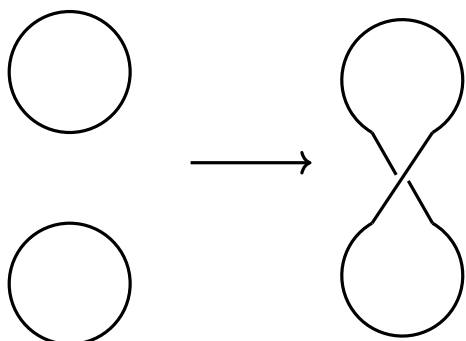


图 7: 时空子涡旋的拓扑相变

间的可积性关联。

10.1 时空子涡旋的拓扑相变

我们考虑在粒子的切平面和法平面上的时空子都存在涡旋解。这是因为无论是切平面还是法平面，对于各向同性的时空子而言，并无本质的区别。实质上，我们在前一章中所引入的涡旋解不仅仅在法平面上是孤子解，在切平面上，同样也存在类似的孤子解。因此，在 3+1 维时空，我们需要理解的是两个不同空间中的双涡旋相互作用的理论。

这样的双涡旋相互作用可以使得涡旋的中心彼此融合或者相交。我们知道，由于规范场的存在，使得涡旋的奇点中心被重构为一个 S^1 。如果这两个 S^1 不存在彼此关联。那么切平面的动力学和法平面的动力学就会完全解耦。而如果是这样，粒子周围的时空子的动力学就将会失去各向同性和均匀的特性。这显然是与物理事实相违背的。换言之，如果切平面和法平面的动力学不发生耦合，将会导致时空是碎片化的。因此，连接两个平面上的动力学必须经由拓扑上的相变。

在涉及到双圈的最简单的拓扑相变是如图 7 所示的相变。注意到 Edward Witten 在 1989 年使用了 John Conway 在 1969 年提出的拆接关系 (Skein Relation) 来研究扭结不变量。令人惊讶的是，图 7 中所示的拓扑相变恰恰是 John Conway 的拆接关系。

由此我们可以知道，切平面和法平面上的时空子涡旋可以形成拓扑绞

点。在双涡旋态的情形下，由于我们可以通过洛伦兹旋转将其中一个涡旋转变为另一个。所以双涡旋可以有一个内部对称性，它是洛伦兹群的子群。仔细分析可知，这样的旋转是 $SO(3)$ 群的双重覆盖，对应两个涡旋的 Z_2 对称性。之所以是双重覆盖，是因为在双涡旋情形下存在两个中心。涡旋的中心本质上是粒子的位置所在。因此两个涡旋的中心实际上是重合的。只是为了清晰的表示时空子涡旋的拓扑，我们将它分成两个来看。因此洛伦兹群的旋转子群恰恰就必须是 $SO(3)$ 的双重覆盖群。也就是 $SU(2)$ 群。这也揭示了拓扑绞点本身的内部对称性和自旋对称性完全一致。

10.2 涡旋的迷向

在第 8 章处理时空子涡旋时，我们用 2+1 维规范场来消除了涡旋中心的能量的发散性。本质上，这种发散行为来自于涡旋中心的奇点。我们将这个奇点重构为一个 S^1 ，在数学上相当于引入了一个 $U(1)$ 主丛结构，规范场本质上是这个主丛上的联络。但实际上，将时空子涡旋中心的奇点重构为圆圈，并没有将这个奇点的所有特性完全重构。这是由于奇点处本身是没有定向的，也即是迷向的。但奇点重构为 S^1 后，其定向是明确的。这说明我们将奇点的迷向特性掩盖了。那么现在的问题就很明确了，即我们需要在 S^1 上引入迷向特性。

T. Martin 在 1976 年 [62] 就已经注意到数学上存在如下的对应。自旋和平动效应在几何上可以分解。由此可以引入对应自旋和平动的联络。本质上，扭量张量刻画了几何体的旋转自由度。它的涵义与表征平动自由度的曲率张量类似。

我们现在考虑的 2+1 维时空子涡旋，本质上是一个微观时空。在这样的时空里，不能忽略挠率带来的影响。微观挠率的存在对于宏观的测地线运动并没有影响，因而也就不会影响广义相对论的结果。

质量作用原理指出：时空子撞击物质粒子，使得物质粒子获得质量。在这种图景下，等效的时空子对物质粒子的碰撞为物质粒子提供了一个时空势能。因此在物质粒子周围的时空是弯曲的。因此其周围的度规张量就不

再是平直度量，而是一个弯曲的度量。

为了引入挠率，我们首先要引入处处正交的切标架场 $e_a(x)$ 如下：

$$e_a(x) = e_a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a = 0, 1, 2 \quad (10.1)$$

满足如下的关系：

$$g^{ij} = \eta^{ab} e_a^i e_b^j, \quad \eta_{ab} = g_{ij} e_a^i e_b^j \quad (10.2)$$

有了正交切标架，可以定义其对偶余切标架，即：

$$\theta^a(x) = \theta^a_i dx^i \quad (10.3)$$

它满足正交关系：

$$\langle \theta^a, e_b \rangle = \delta_b^a \quad (10.4)$$

且有：

$$g_{ij} = \eta_{ab} \theta^a_i \theta^b_j, \quad \eta^{ab} = g^{ij} \theta^a_i \theta^b_j \quad (10.5)$$

此时微分间隔为：

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \eta_{ab} \theta^a_i \theta^b_j dx^i dx^j = \eta_{ab} \theta^a \theta^b \quad (10.6)$$

对切标架场做协变微分，可定义自旋联络，即：

$$\omega_{ia}^b e_b = D_i e_a, \quad \omega_{ia}^b = \langle D_i e_a, \theta^b \rangle \quad (10.7)$$

其中 $\omega_{ia}^b(x)$ 称为自旋联络系数，而

$$\omega_a^b(x) = \omega_{ia}^b(x) dx^i \quad (10.8)$$

则是自旋联络 1-形式场，有了它，我们可以定义协变微分

$$D' = \partial + \omega \quad (10.9)$$

当作用在一个矢量场 $\xi^a(x)$ 上时，

$$D'_i \xi^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^i} + \omega_{ib}^a \xi^b \quad (10.10)$$

利用自旋联络，可以讨论满足局域洛伦兹对称下的自旋表示场与时空的耦合。即如果存在局域洛伦兹对称的旋量场 $\psi(x)$ ，那么其动力学意义上的动量项为：

$$D'_i \psi = \partial_i \psi + \frac{1}{2} \omega_i^{ab} \Sigma_{ab} \psi \quad (10.11)$$

其中 Σ_{ab} 为洛伦兹代数的自旋表示，即

$$[\Sigma_{ab}, \Sigma_{cd}] = \eta_{bc} \Sigma_{ad} + \eta_{ad} \Sigma_{bc} - \eta_{ac} \Sigma_{bd} - \eta_{bd} \Sigma_{ac} \quad (10.12)$$

引入自旋联络 ω_i^{ab} ，那么余切场 $\theta(x)$ 在此联络下的平行输运就定义了流形上的挠率

$$\begin{aligned} \tau_{ik}^a &= D'_i \theta_k^a - D'_k \theta_i^a \\ &= \frac{\partial \theta_k^a}{\partial x^i} - \frac{\partial \theta_i^a}{\partial x^k} + \omega_{ib}^a \theta_k^b - \omega_{kb}^a \theta_i^b \end{aligned} \quad (10.13)$$

它是余切标架场的场强。当它不为零时，表明流形是有挠即内在扭曲的。这个余切标架场的非平凡性将导致我们在拼接两个 2+1 维理论的时候会发生标架场的多值性。由于存在涡旋中心奇点，并且由于标架场也围绕奇点转动了一周，所以标架场的方向在奇点处存在一个多值性矩阵。为了补偿这个多值性 2×2 矩阵带来的多值性，我们需要考虑如下的贡献：

$$I = \int d^3x \text{Tr}[\epsilon^{ijk} \theta_i^a \tau_{jk}^a] + \int d^3x \star \text{Tr}[\epsilon^{ijk} \theta_i^{a\star} \tau_{jk}^{a\star}] \quad (10.14)$$

其中 Tr 表示对标架指标进行求和。带有 \star 指标的是表示在对偶的 2+1 维平面上的挠率的贡献。我们看到，(10.14) 实际上是定义在 3+1 维时空的局域 2+1 维边界上的两个 Chern-Simons 理论的简单拼接。因此我们还需要引入拼接约束，即两者必须互为霍奇对偶。容易证明，当存在如下的约束时，(10.14) 的第一项和第二项互为 Hodge 对偶。约束为：

$$\epsilon^{ijk} \theta_i^a = \epsilon^{ijkl} \tau_{il}^{a\star}, \quad \epsilon^{ijkl} \tau_{jk}^a = \epsilon^{ijl} \theta_j^{a\star} \quad (10.15)$$

此时两个 2+1 维 Chern-Simons 理论就被融合成为一个 3+1 维瞬子作用量，即

$$I = 2 \int d^4x \epsilon^{ijkl} \text{Tr}(\tau_{il}^{a\star} \tau_{jk}^a) \quad (10.16)$$

我们看到，在融合的情形下，余切标架的贡献完全等价于一个规范场的场强的拓扑瞬子贡献。这样的瞬子作用量仅仅只会对涡旋的配分函数有一个常数因子的贡献。下面就是要计算出这样的常数因子。

用微分形式来写 (10.16)，它可以看作是 3+1 维时空上的示性数。注意到当跟随此余切标架场时，在 2+1 维平面上，其涡旋边界可以看作是一个 S^2 。我们要连接两个 S^2 ，使之变成一个 3+1 维时空流形的边界。如果是平凡连接，那么这个 3 维流形的边界就是一个 $S^2 \times I$ ，其中 I 是单位线段 $[0, 1]$ 。但实际上 3+1 维时空是 $R^{3,1}$ ，当不存在物质粒子时，其边界为空集。但当存在粒子时，局域的时空存在的边界可以看作是一个 S^3 。这就是说，我们在使用 Hodge 对偶变换两个 2+1 维涡旋时。两个涡旋的边界 S^2 彼此之间是非平凡连接的，它最终形成的流形是 S^3 。本质上，这是在说明两个 2+1 维涡旋经由拓扑相变形成了 3+1 维时空中物质粒子周围的时空子的微观稳定构型。

现在考虑 (10.16) 的配边 (cobordism) 示性数，它实际上描述了从 $S^2 \times I$ 到 S^3 的相角的变换。这个非平凡的拓扑变换的相角差异就是 (10.16) 的结果。我们得到

$$I = 2 \times \frac{\text{vol}(S^3)}{\text{vol}(S^2)} \times N = 2 \times \frac{2\pi^2}{4\pi} \times N = \pi N \quad (10.17)$$

其中 N 就是相应于扭量 τ 的拓扑示性数，也即缠绕数，它刻画从 $S^2 \times I$ 到 S^3 的映射的重数。物理上叫 *theta* 贡献。在考虑物质粒子的波函数时，我们不会看到时空子涡旋的这个示性数的贡献，因此它就作为时空子配分函数引入到物质粒子的波函数中，它的贡献就是：

$$\Psi^{[N]} = \psi(x, t) \exp(iI) = (-)^N \psi(x, t) \quad (10.18)$$

当粒子在某个 2 维平面旋转一周，其 2+1 维涡旋旋转一周。在此情形下，余切向量场跟随此旋转也围绕着 S^3 一次。相应的效果是拓扑缠绕数增加 1 或减少 1，此时

$$\Psi^{[N]} \rightarrow \Psi^{[N+1]} \text{ or } \Psi^{[N-1]} \quad (10.19)$$

即

$$\Psi \rightarrow -\Psi \quad (10.20)$$

由此我们证明了物质粒子的自旋必然是 $1/2$ ，也即费米统计性质。

由此，我们得到重要的结论。物质粒子的自旋统计根源于时空子涡旋在物质粒子周围的时空子涡旋中心处奇点的迷向性。这个奇点本身是二重覆盖的，它由两个 $2+1$ 维的涡旋经过在奇点处的流形配边而进行奇点的重构，且再现了奇点处的迷向性质。自旋性质相应于配边处的拓扑相变。因此，在质量作用原理的框架下，物质粒子的自旋本质上是刻画物质粒子周围的时空子涡旋的拓扑相变的拓扑序。

10.3 泡利不相容原理

我们用 s 来标记对应于时空子涡旋的配边拓扑相变的拓扑序。为了统一定义，我们将这个拓扑序看作是一个量子演化算符。也即

$$e^{\frac{i}{\hbar} \hat{s} \theta} |\Psi\rangle = e^{i\theta/2} |\Psi\rangle \quad (10.21)$$

由此定义可以将此拓扑序看作是本征值为 $\frac{\hbar}{2}$ 的算子，即 $\langle \hat{s} \rangle = \frac{\hbar}{2}$ 。将旋转一周的参数 $\theta = 2\pi$ 代入上式，即可得费米统计性质。

现在我们来考虑交换两个全同物质粒子的情形。假如粒子 1 处于 $|\Psi_{x_1}(p)\rangle$ 态，粒子 2 处于 $|\Psi_{x_2}(p)\rangle$ 态。那么两者的直积系统就处在 $|\Psi_{x_1}(p)\rangle \otimes |\Psi_{x_2}(p)\rangle$ 态。我们可以将 $|\Psi_{x_1}(p)\rangle$ 绕着 x_1, x_2 连线的中点旋转半圈，同时将 $|\Psi_{x_2}(p)\rangle$ 也绕着 x_1, x_2 连线的中点旋转半圈。此时由于粒子周围的涡旋也同样旋转了半圈，由此

$$\begin{aligned} T_{x_1, x_2} e^{i\pi \hat{s}} |\Psi_{x_1}(p)\rangle \otimes |\Psi_{x_2}(p)\rangle &= e^{i\frac{\pi}{2}} |\Psi_{x_2}(p)\rangle \otimes e^{i\frac{\pi}{2}} |\Psi_{x_1}(p)\rangle \\ &= -|\Psi_{x_2}(p)\rangle \otimes |\Psi_{x_1}(p)\rangle \end{aligned} \quad (10.22)$$

其中 T_{x_1, x_2} 交换了 x_1, x_2 。那么如果两个在相同的状态函数下的两个全同的物质粒子，且把它们放在同一个位置上，那么由 (10.22)，会得出如下的结论：

$$|\Psi_x(p)\rangle \otimes |\Psi_x(p)\rangle = -|\Psi_x(p)\rangle \otimes |\Psi_x(p)\rangle \quad (10.23)$$

当且仅当 $|\Psi_x(p)\rangle \otimes |\Psi_x(p)\rangle = 0$ 上式才可能成立。而 $|\Psi_x(p)\rangle \otimes |\Psi_x(p)\rangle = 0$ 则意味着这样的态不可能存在。因此，泡利不相容原理在质量作用原理框架下也就是自然成立的。

10.4 时空子作为物质粒子的牧者

质量作用原理不用根据任何特殊的假说，就即定性又定量地解释了量子力学的所有重要内容，从而扫除了量子力学中哥本哈根解释唯心主义的最后痕迹。从根本上说，质量作用原理要求一种无质量无自旋的标量粒子，即时空子。时空子的存在是物理上的一种客观事实，这在本质上有别于量子力学的波函数。由此本文才能从根本上解决一系列极为重要的，前人单凭量子力学无法解决的问题：物质粒子如何保证自身的动量和位置满足一定的不确定关系？物质粒子为什么能够呈现出波和粒子两种不同的性质？物质粒子怎么知道哪些能级可以去，哪些能级绝对不可以去，即如何能够满足泡利不相容原理？量子力学只能依靠提出一系列公理来避开以上难题。质量作用原理不仅从数学推导上解决了以上的难题，而且由时空子从客观实在的层面上让物质粒子去毫无差错的执行这些量子力学公理。物质粒子的一切行为，背后都根源于它们共同的牧者——时空子。正是时空子的随机碰撞，看似杂乱无章，实则物质粒子一切微观行为的监督者。因为无数个无处不在无时不在的监督者，才诞生了这个奇妙的量子世界。

量子力学作为一门最成功的物理科学，最终都是回避不了自身的完备性问题。在物质粒子怎样去遵守量子力学公理这个根本问题无法回答的时代，量子力学的完备性问题是无从谈起的。当物质粒子一切量子行为的监督者和牧者时空子的理论——质量作用原理出现之后，量子力学完备性问题就有了进行讨论和研究的基础。质量作用原理及其时空子，为最终解决一百年来量子力学完备性的大难题，向前迈进了一大步。

11 缪子物理与质量作用原理

11.1 理论框架

在质量作用原理的框架下，时空子与物质粒子发生了碰撞相互作用。在量子场论中，这相当于在理论中引入了无质量标量场以及它与物质粒子相互作用的项。因此，粒子物理标准模型需要被修正为：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + \mathcal{L}_{ST} + \mathcal{L}_{int} \quad (11.1)$$

上式中， \mathcal{L}_{SM} 为粒子物理标准模型的拉格朗日量； \mathcal{L}_{ST} 为时空子标量场的动能项，它可以被表达为：

$$\mathcal{L}_{ST} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad (11.2)$$

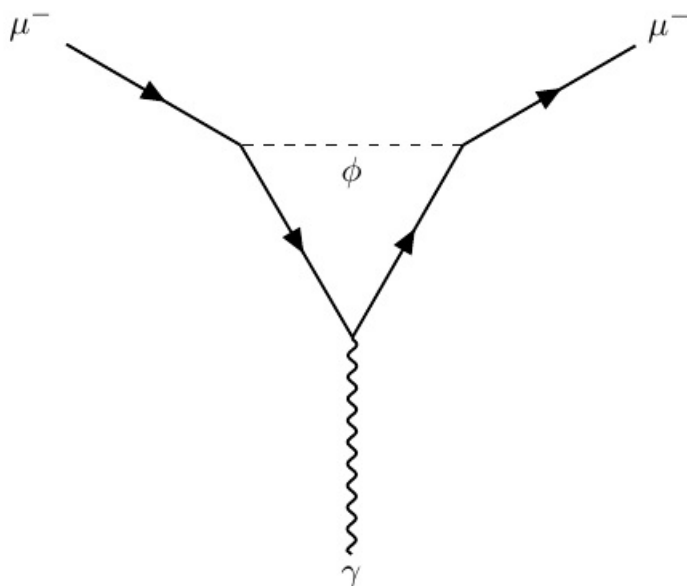
由于时空子与物质粒子的碰撞作用强度正比于粒子的质量，故时空子与物质粒子的相互作用项则表示为：

$$\mathcal{L}_{int} = \lambda \sum_{i \text{ all matter fields}} m_i \phi \bar{\psi}_i \psi. \quad (11.3)$$

其中 ψ_i 代表标准模型中的物质粒子，也即轻子和夸克。 m_i 为相应物质粒子的质量。

显然，对于物质粒子来说，其质量本身就已经反映了时空子与物质粒子碰撞相互作用的信息。因此在树图阶，相互作用 (11.3) 并不会改变任何物理。但是在圈图阶，上式的相互作用是粒子物理标准模型忽略的。

在本章中，我们将考虑时空子与缪子相互作用而导致的缪子物理的修正问题，其中包括两个方面的问题。其一为缪子反常磁矩的修正问题。其二为缪子的寿命问题。之所以考虑缪子物理，是因为相对于电子而言，缪子质量大了两百倍。这意味着在圈图阶，时空子对于缪子物理的修正比电子大约大 10^4 倍。另一方面，电子也并不存在衰变，实验中无法验证时空子的影响。

图 8: 时空子对 μ 子反常磁矩贡献的费曼图

11.2 缪子反常磁矩

缪子的反常磁矩由三角费曼图贡献。时空子标量场对于缪子反常磁矩的单圈贡献可以用费曼图 8 表示。

早在 1972 年, Jackiw 和 Weinberg 就已经计算过这个图的贡献 [46], 它对缪子反常磁矩的贡献为:

$$\Delta g_\mu = \frac{3\lambda^2 m_\mu^2}{8\pi^2}. \quad (11.4)$$

Jackiw 和 Weinberg 在他们的论文中称这个贡献为“虚拟标量场”的贡献。由于在标准模型中并不存在这个“虚拟标量场”, 所以在随后的实验验证中都没有考虑这个标量场的贡献。但在质量作用原理中, 这个标量场毫无疑问是真实存在的, 它就指代时空子标量场。因此我们需要考虑它对缪子反常磁矩的贡献。

早在 2006 年, 美国布鲁克海文国家实验室就从实验上发现了缪子的反常磁矩和标准模型的预测有 3.3σ 的差异 [47], 即

$$a_\mu(\text{BNL}) = 116592080(63) \times 10^{-11}(0.54\text{ppm}).$$

其中 $a_\mu = \frac{g_\mu - 2}{2}$ 为缪子反常磁矩差异值。而在 2021 年, 美国费米国家实验室精确测量了缪子反常磁矩差异值 [48], 得到的结果是:

$$a_\mu(\text{FNAL}) = 116592040(54) \times 10^{-11}(0.46\text{ppm}).$$

综合两个实验, 平均的反常磁矩差异值为:

$$a_\mu(\text{EXP}) = 116592061(59) \times 10^{-11}(0.35\text{ppm}).$$

而从标准模型出发, 计算得到的 a_μ 为:

$$a_\mu(\text{SM}) = 116591810(43) \times 10^{-11}(0.37\text{ppm}).$$

实验和理论的偏差为:

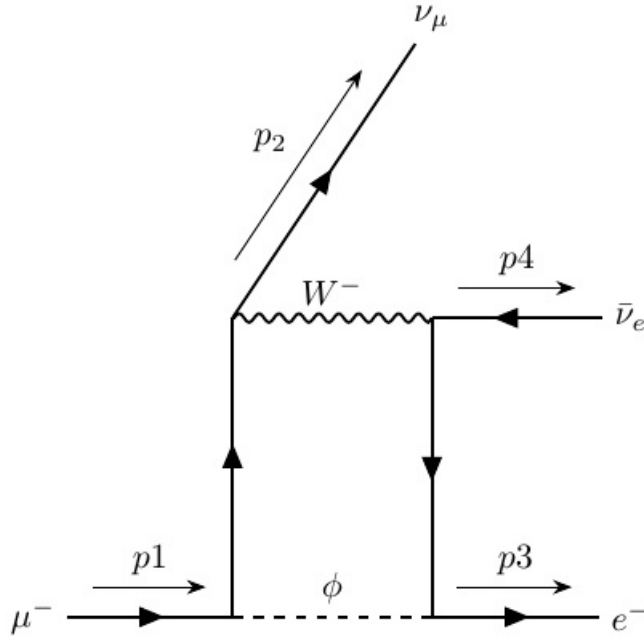
$$a_\mu(\text{EXP}) - a_\mu(\text{SM}) = 251 \pm 59 \times 10^{-11}.$$

这个偏差达到了 4.2σ , 因此是一个非常显著的偏离。这意味着标准模型中有极大可能遗漏了某种粒子的贡献。在质量作用原理框架下, 我们认为这种偏差完全来自于时空子的贡献。由此偏差可以确定出时空子和物质粒子的耦合常数 λ , 它的值如下给出:

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= (a_\mu(\text{EXP}) - a_\mu(\text{SM})) \frac{16\pi^2}{3m_\mu^2} \\ &= 1.18349(\pm 0.27819) \times 10^{-11} \text{MeV}^{-2} \end{aligned} \quad (11.5)$$

$$\lambda = 3.44019_{-0.43137}^{+0.38300} \times 10^{-6} \text{MeV}^{-1} \quad (11.6)$$

因此, 引入时空子和缪子的相互作用完全可以将缪子反常磁矩的理论和实验结果吻合起来。

图 9: 时空子对 μ 子衰变的单圈贡献的费曼图

11.3 缪子衰变问题

进一步地, 要证明引入时空子标量场的自洽性, 我们还需要考虑时空子与物质粒子的单圈相互作用的相应物理。换言之, 如果引入时空子标量场以及其耦合强度 λ 造成了某个物理过程的理论和相应的实验结果矛盾, 即证伪时空子标量场并非是缪子反常磁矩的偏差来源。因此, 我们考虑缪子衰变问题中的单圈过程。在时空子的参与下, 相应的费曼图如图 9 所示:

这个箱型费曼图的贡献, 即散射振幅 \mathcal{M} 为:

$$i\mathcal{M} = -\frac{g_w^2 \lambda^2 m_\mu m_e}{8} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{D}(k, p, m)}{\mathcal{N}(k, p, m)} \quad (11.7)$$

$$\mathcal{D}(k, p, m) = \bar{u}(p_2)(1 + \gamma^5)(\not{k} + m_\mu)\gamma^\mu u(p_1)\bar{u}(p_2)(\not{k} - \not{p}_2 + \not{p}_4 + m_e)\gamma_\mu(1 - \gamma^5)v(p_4) \quad (11.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(k, p, m) &= [(k^2 - m_\mu^2 + i\epsilon)] [((k - p_2)^2 - m_w^2 + i\epsilon)] \\ &\times [(k - p_2 + p_4)^2 - m_e^2 + i\epsilon] [(k - p_1)^2 + i\epsilon] \end{aligned} \quad (11.9)$$

在没有引入时空子标量场的情形下，缪子衰变的散射振幅可以如下形式地标记：

$$\mathcal{M}_{ST} = \mathcal{M}_{tree} + \mathcal{M}_{1-loop} + \mathcal{M}_{2-loop} + \dots$$

引入时空子标量场后，散射振幅的模方可以写成：

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= (\mathcal{M}_{ST} + \mathcal{M})(\mathcal{M}_{ST}^* + \mathcal{M}^*) \\ &= |\mathcal{M}_{ST}|^2 + 2\text{Re} \left[\sum_{\text{all spins}} \mathcal{M}_{tree}^* \mathcal{M} \right] + \text{higher order terms} \end{aligned} \quad (11.10)$$

因此，我们只需要计算 $\text{Re} \left[\sum_{\text{all spins}} \mathcal{M}_{tree}^* \mathcal{M} \right]$ 的值就可以得到散射振幅的修正。

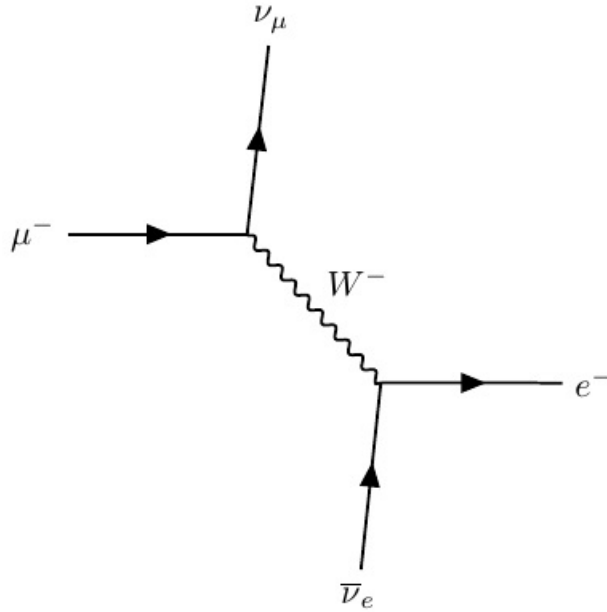
\mathcal{M}_{tree} 代表的是图 10 的贡献，它的表达式如下：

$$\mathcal{M}_{tree}^* = -\frac{g_w^2}{8m_W^2 c^2} \bar{u}(p_1) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_2) \bar{v}(p_4) (1 + \gamma^5) \gamma_\mu u(p_3) \quad (11.11)$$

使用卡西米尔方法缩并所有的狄拉克矩阵，最终可得：

$$\sum_{\text{all spins}} \mathcal{M}_{tree}^* \mathcal{M} = i \frac{4g_w^4 \lambda^2 m_\mu^2 m_e^2}{m_W^2 c^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi^4)} \frac{[(k + p_1) \cdot p_4] [(k + p_1 - 2p_4) \cdot p_2]}{\mathcal{N}(k, p, m)} \quad (11.12)$$

我们使用 V. A. Smirnov 等人发展的梅林-巴恩斯 (MB) 表示 [54, 55, 56, 57, 58] 来计算这个积分。对于 (11.12) 中的积分核，我们可以做代换 $k + p_1 \rightarrow k$ ，然后使用梅林-巴恩斯表示将其表达为多个 Γ 函数的因子形式，最后再将 MB 积分做合适的围道积分，由于存在多个 Γ 函数的极点重合的情形，所以需要在多个奇点处做围道积分的顺序展开。我们将对 k 积分完成的结果

图 10: μ 子衰变的树图

记为 $\mathcal{F}(s, t, m)$, 其中 $s = (p_1 - p_2)^2, t = (p_1 - p_3)^2$ 为曼德尔斯塔姆变量。在缪子的静止参考系下, 即 $p_1 = (m_\mu c^2, 0, 0, 0)$ 时, 缪子的衰变率由如下微分:

$$d\Gamma = \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{2\hbar m_\mu} \left(\frac{d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}_2|} \right) \left(\frac{d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}_3|} \right) \left(\frac{d^3 \mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}_4|} \right) \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \quad (11.13)$$

决定。将电子, 反电子中微子, 缪子中微子的动量也明显地写下, 它们是:

$$p_2 = (|\mathbf{p}_2|c, \mathbf{p}_2), p_3 = (|\sqrt{|\mathbf{p}_3|^2 c^2 + m_e^2 c^4}, \mathbf{p}_3), p_4 = (|\mathbf{p}_4|c, \mathbf{p}_4) \quad (11.14)$$

将上式以及缪子的动量 p_1 代入 $\mathcal{F}(s, t, m)$ 中, 其形式变为 $\mathcal{F}(|\mathbf{p}_2|, |\mathbf{p}_3|, m_e, m_\mu, m_W)$

那么由时空子引起的衰变率的变化为:

$$\Delta\Gamma_{ST} = -\frac{g_w^4 \lambda^2 m_e}{8\pi^3 m_W^2 c^2 \hbar} \int_0^{m_\mu c/2} d|\mathbf{p}_2| \int_{m_\mu c/2 - |\mathbf{p}_2|}^{m_\mu c/2} d|\mathbf{p}_3| \text{Im}(\mathcal{F}(|\mathbf{p}_2|, |\mathbf{p}_3|, m_e, m_\mu, m_W)) \quad (11.15)$$

代入数值计算可知：

$$\Delta\Gamma_{ST} = 1.2141 \pm (0.2854)s^{-1} \quad (11.16)$$

由标准模型计算得到的缪子衰变率为：

$$\Gamma_{SM} = 455169.311s^{-1} \quad (11.17)$$

因此缪子在时空子作用下的寿命为：

$$\tau_{\mu} = 1/(\Gamma_{SM} + \Delta\Gamma_{ST}) = 21969788(\pm 14) \times 10^{-13}s \quad (11.18)$$

实验上，缪子寿命为

$$\tau_{\mu}(\text{Exp}) = 21969811(\pm 22) \times 10^{-13}s \quad (11.19)$$

由此可见，加入时空子标量场的贡献后，缪子的理论寿命几乎完美符合实验观测结果。

CDF 研究小组发表了关于 W 玻色子质量的最新实验，结果与标准模型的理论预测存在着重大的偏差 [67]。据该文中的最新数据，W 玻色子的质量为

$$m_W = 80433.5(\pm 9.4)MeV/c^2 \quad (11.20)$$

我们使用 W 玻色子的新质量重新计算了缪子寿命的偏差，

$$\Delta\Gamma_{ST}^{new} = 0.9273 \pm (0.2180)s^{-1} \quad (11.21)$$

$$\tau_{\mu}^{new} = \frac{1}{(\Gamma_{SM} + \Delta\Gamma_{ST}^{new})} = 21969802(\pm 10.5) \times 10^{-13}s \quad (11.22)$$

这个结果与实验更为吻合，因此缪子的寿命极大地支持时空子的存在。

11.4 轻子反常磁矩和时空子

我们已经考虑了质量作用原理在缪子物理中的影响。引入时空子标量场，缪子的反常磁矩以及衰变寿命的理论和实验的偏差都能得到很好解释。同样地，我们可以考虑引入时空子后，其它轻子的理论和实验偏差。

11.4.1 电子反常磁矩

对于电子的反常磁矩测量已经非常准确了。目前实验测定的电子反常磁矩 [49] 是:

$$a_e(\text{Exp}) = (1159652180.91 \pm 0.26) \times 10^{-12} \quad (11.23)$$

值得注意的是, 使用标准模型理论计算电子反常磁矩时, 要用到对于电子精细结构常数 α 的精确测量值。而在 10^{-12} 的量级下, 精细结构常数的偏差已经很大, 因此理论计算的电子反常磁矩有比较大的范围。计算得到的电子反常磁矩 [51, 52, 53] 为:

$$a_e^{\text{SM}}(\text{Rb}) = (1159652180.252 \pm 0.095) \times 10^{-12} \quad (11.24)$$

$$a_e^{\text{SM}}(\text{Cs}) = (1159652181.61 \pm 0.23) \times 10^{-12} \quad (11.25)$$

实验和理论的偏差为:

$$\Delta a_e(\text{Rb}) = a_e^{\text{SM}}(\text{Rb}) - a_e(\text{Exp}) = -(0.658 \pm 0.355) \times 10^{-12} \quad (11.26)$$

$$\Delta a_e(\text{Cs}) = a_e^{\text{SM}}(\text{Cs}) - a_e(\text{Exp}) = +(0.7 \pm 0.49) \times 10^{-12} \quad (11.27)$$

而引入时空子后, 电子反常磁矩的修正值为:

$$\begin{aligned} \Delta a_e^{\text{MIP}} &= \frac{3\lambda^2 m_e^2}{16\pi^2} = \frac{3 \times (1.18349 \pm 0.27819) \times (0.51099895)^2 \times 10^{-11}}{16 \times 3.1415926536^2} \\ &= (0.0587 \pm 0.0138) \times 10^{-12} \end{aligned} \quad (11.28)$$

由上面的计算可知, 在当前的实验基础下, 电子的反常磁矩由于时空子标量场的修正比目前的理论-实验偏差要小一个数量级。但是这是因为实验对于精细结构常数测量的精度不够造成的。目前的实验条件还无法验证电子反常磁矩在时空子作用下带来的修正。但是在当前的实验精度下, 时空子引起的电子反常磁矩的修正是与实验相容的。

11.4.2 陶子反常磁矩

由于陶子的寿命相当短，所以很难在这样短的时间内精确测量其反常磁矩。仅仅只能给出一个非常粗略的范围，它大概是 [50]:

$$-0.052 < a_{\tau}(\text{Exp}) < 0.013 \quad (11.29)$$

置信水平大约 95%。

而标准模型计算的陶子反常磁矩 [50] 为:

$$a_{\tau}(\text{SM}) = (117721 \pm 5) \times 10^{-8} \quad (11.30)$$

引入时空子后，陶子反常磁矩的修正值为:

$$\begin{aligned} \Delta a_{\tau}^{\text{MIP}} &= \frac{3\lambda^2 m_{\tau}^2}{16\pi^2} = \frac{3 \times (1.18349 \pm 0.27819) \times (1776.86)^2 \times 10^{-11}}{16 \times 3.1415926536^2} \\ &= (7.0986 \pm 1.6686) \times 10^{-7} \end{aligned} \quad (11.31)$$

此修正值与理论值的比值为

$$\rho_{\tau} = \frac{\Delta a_{\tau}^{\text{MIP}}}{a_{\tau}(\text{SM})} \simeq 0.0006 \quad (11.32)$$

实际上，这个修正值比率是三代轻子中最大的。但是由于实验上测量陶子反常磁矩存在非常大的困难，其不确定程度远远超越时空子带来的修正效应。所以虽然我们可以用时空子标量场来预言一个这样的修正，目前实验上还无法对这个预言的修正进行验证。但是在当前的实验精度下，时空子引起的陶子反常磁矩的修正也是与实验相容的。

11.5 本章小结

在本章中，我们考虑了时空子对于缪子物理的两个修正。其一是时空子标量场对于缪子反常磁矩的修正，由最新的实验结果拟合出了时空子标量场与物质粒子的作用强度 λ 。其二，我们计算了时空子标量场对于缪子衰变的修正。用同样的一个作用强度 λ ，此修正让理论预测结果近乎完美地符合了实验观测结果。由此可见，只需要一个参数，即时空子与物质粒子的作用强度 λ ，我们就可以同时对缪子的寿命和反常磁矩做出自洽准确的解释。

12 质量作用原理图景中的熵

相空间是一个微妙的概念，质量作用原理图景中，粒子的坐标和动量可以完全独立，由此相空间具有实在的物理意义。在相空间里面讨论无相互作用粒子的熵问题，将变得更加清晰且富有物理内涵。

12.1 相空间中的熵

让我们先考虑一个质量为 m 的物质粒子，处在一个谐振子势中。粒子的能量为其动能和势能之和

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \quad (12.1)$$

其中 k 为弹簧的劲度系数，根据牛顿第二定律有

$$m\ddot{x} = F = -\frac{dV}{dx} = -kx \quad (12.2)$$

由此可知

$$k = m\omega^2 \quad (12.3)$$

其中 ω 是粒子振动的频率。

粒子的状态由 (x,p) 刻画，在 (x,p) 空间中，每一个点代表粒子的一个状态。这个空间称为相空间，粒子的运动构成相空间中的轨迹。

对于每一个确定的能量 E ，粒子在相空间的轨迹是一个椭圆。因为根据椭圆的定义，我们可以写成

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} = 1 \quad (12.4)$$

由此可以确定椭圆的两个轴长

$$a = \sqrt{2mE} \quad (12.5)$$

$$b = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \quad (12.6)$$

根据质量作用原理，粒子沿着相空间的椭圆运动一周，必然与时空子交换普朗克常数整数倍的作用量

$$\oint p dx = nh \quad (12.7)$$

由积分的几何意义可知，积分值正好对应椭圆的面积

$$\oint p dx = \pi ab = \frac{2\pi E}{\omega} \quad (12.8)$$

由此我们得到重要的结果

$$E = n\hbar\omega \quad (12.9)$$

这是量子力学最重要区别于经典力学之处，能级是离散的。即是说，不是所有的能量 E ，都是被允许的运动。相空间中，只有离散的一个个椭圆才是可能的运动，对应可能的状态（每一个不同的 E 对应不同的长短轴，即对应不同的椭圆。当 E 变化时，长短轴同时变大或变少，所以所有的椭圆都不会有交叉）。

有了这个重要的结果，我们可以开始来数可能的状态数，以此来确定熵。

直观来看，相空间的椭圆族，每一个可能的 E 所占相空间的体积（我们这里为了直观，讨论的是一维运动，对应的相空间是 2 维，因此是面积），恰好是两个相邻椭圆的所包围的面积 A 。最重要的是，这个面积 A 是个常数，同理可以用积分来计算具体大小

$$A = \oint_{E=(n+1)\hbar\omega} p dx - \oint_{E=n\hbar\omega} p dx = h \quad (12.10)$$

由此证明了每一个可能的状态，在相空间中占有普朗克常数的相同面积。若进一步考虑时空子无穷多次碰撞的净效应 $1 + 1 + 1 + \dots = \zeta(0) = -\frac{1}{2}$ ，可以得到量子力学的完整结果：简谐振子的能级为 $E = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ 。

12.2 绝对零度下的熵

让我们先考虑绝对零度下的熵，然后再讨论热力学的熵。若认为绝对零度下的熵必须等于 0，根据玻尔兹曼熵的定义，熵为同样能量下所有可能微观状态数的对数。那么等价于，绝对零度下只能有唯一一个状态，所以其熵为 0。

如果从量子力学的时间尺度来看，这个结论是正确的。因为质量作用原理短时间尺度下的时空子碰撞，形成量子力学时间尺度下的波函数是一个纯态，其熵必定为 0。量子力学中的自由粒子，可以用平面波 $e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}$ 来刻画，其中 $\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar$ 称为波函数的相因子。在质量作用原理的时间尺度下，我们将推广这一个关键的相因子。第一，在这极短的时间尺度内，根据 3.5 节我们把量子力学的动量 \vec{p} 推广到瞬时动量 \vec{P}_i 。第二，瞬时动量不是一个守恒量，原来相因子中的 $\vec{p}\cdot\vec{x}$ 必须推广为 $\int_{\gamma} \vec{P}_i \cdot d\vec{x}$ 。第三，对于自由粒子来说，我们总可以选择经典统计速度为 0 的惯性参照系。而随机速度在量子力学的时间尺度下走过路径 γ 的积分为 0。因此瞬时动量中的三部分，只剩下包络速度的贡献。粒子的所有可能微观状态数可以由其包络速度 u 来刻画。短时间尺度内，不同的包络速度可以代表不同的可能状态。重要的是，我们由此可在质量作用原理图景中构造熵，然后找到如下一个途径过渡到长时间尺度下，量子力学关于熵的结果。

综合以上三点的讨论，在量子力学的时间尺度下粒子走过一个路径 γ ，我们可以把量子力学中的相因子推广为

$$K_i = \frac{1}{\hbar} \int_{\gamma} \vec{P}_i \cdot d\vec{x} = \frac{m_{st}}{\hbar} \int_{\gamma} \vec{u}_i \cdot d\vec{x} \quad (12.11)$$

其中 i 标记质量作用原理的时间尺度下可能的状态，不同的 i 代表不同的状态。 K_i 是一个无量纲的量。由第五章的结论，包络速度是一个无旋场

$$\nabla \times \vec{u} = 0 \quad (12.12)$$

所以 K_i 不依赖于路径 γ , 只是端点的函数。必须注意, 熵是一个状态量, 一个状态有一个熵, 与如何达到这个状态无关。

这个可能状态 i 的概率定义为

$$p_i = \frac{1}{N} e^{2K_i} \quad (12.13)$$

其中归一化常数

$$N = \sum_i e^{2K_i} \quad (12.14)$$

保证各种可能状态的概率和为 1

$$\sum_i p_i = 1 \quad (12.15)$$

并且保证各种可能状态的概率都大于 0, 符合数学要求。

在质量作用原理图景中, 有了短时间尺度下可能状态的概率, 我们即可定义对应的熵为

$$S = - \sum_i p_i \log p_i \quad (12.16)$$

由这个定义, 我们宣称可过渡得到量子力学熵的所有结果。

推导如下:

对公式 (12.11) 两边求梯度可得:

$$\nabla K_i = \frac{m_{st}}{h} \vec{u}_i \quad (12.17)$$

对于每一种可能的状态 i , 在量子力学时间尺度下会呈现波函数 ψ_i , 它的模写为

$$|\psi_i| = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{K_i} \quad (12.18)$$

在每一个可能的状态下, K_i 刚好对应到原来的势函数 R (参见式 (5.33))。由此我们的熵定义等价于

$$S = - \sum_i 2|\psi_i|^2 \log |\psi_i| \quad (12.19)$$

这和量子力学中冯诺伊曼熵的定义，是完全等价的。因为我们选择用包络速度进行定义状态的概率，恰恰就是让概率能够和量子力学的波恩诠释一致，即这个概率刚好就是 i 状态波函数的模方。这样就保证了我们所定义的熵，所证明的熵增原理，和统计物理是同一回事。由此从质量作用原理的短时间尺度下包络速度的微观行为，导出长时间尺度下量子力学熵的性质。

我们可以这样总结本节的结论：在绝对零度，质量作用原理的时间尺度下，物质粒子的熵并不为零，其各种不同的微观状态由不同的包络速度来刻画。根据第五章的结论，经过长时间的随机碰撞，达到量子力学的时间尺度之后，绝对零度下的物质粒子呈现为一个纯态的波函数，其演化规律满足薛定谔方程。此时只有一个状态 i 的概率为 1，其它状态的概率为 0。这就自然得到量子力学的结论：绝对零度时熵为 0。

12.3 有限温度下的熵

当我们不只是考虑单粒子的量子行为，而是无相互作用多粒子的热力学性质，上节的工作需要做进一步的推广。第一步，我们推广到两个粒子，一个处于 i 状态一个处于 j 状态的概率为 $p_i \tilde{p}_j$ 。如果是全同粒子， p 和 \tilde{p} 两个概率分布函数相同。根据上面熵的定义，两个粒子系统的熵为

$$\begin{aligned}
 S &= - \sum_{ij} (p_i \tilde{p}_j) \log(p_i \tilde{p}_j) = - \sum_{ij} p_i \tilde{p}_j \log p_i - \sum_{ij} p_i \tilde{p}_j \log \tilde{p}_j \\
 &= - \sum_i p_i \log p_i \sum_j \tilde{p}_j - \sum_j \tilde{p}_j \log \tilde{p}_j \sum_i p_i \\
 &= - \sum_i p_i \log p_i - \sum_j \tilde{p}_j \log \tilde{p}_j \\
 &= S_1 + S_2 \tag{12.20}
 \end{aligned}$$

得到了熵的重要性质，可加性。由此可以直接推广到任意多粒子系统的熵，等于每个单粒子的熵的和。即是说：宏观热力学熵是各部分子系统熵之和。而我们是把每一个单粒子当成一个独立的子系统，也就是一个理论上最小的子系统。要和热力学熵联系起来，必须有温度。

第二步，在质量作用原理框架下定义温度，阐述如下。我们已经从质量作用原理证明了熵的可加性。利用这个基本性质可以定义温度这个物理量。设有两个子系统能量分别为 E_1 和 E_2 ，系统总能量 $E = E_1 + E_2$ 是个守恒量。那么利用熵的可加性

$$S(E) = S_1(E_1) + S_2(E_2) \quad (12.21)$$

总系统是个封闭的系统，平衡时对两边 E_1 求导数，得到

$$0 = \frac{dS_1}{dE_1} + \frac{dS_2}{dE_2} \frac{dE_2}{dE_1} = \frac{dS_1}{dE_1} - \frac{dS_2}{dE_2} \quad (12.22)$$

由此可见，平衡时存在着一个物理量，各个子系统都具有的，而且都相等，我们把这个物理量叫做温度 T ，定义为

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T} \quad (12.23)$$

即有

$$\frac{dS_1}{dE_1} = \frac{1}{T_1} = \frac{dS_2}{dE_2} = \frac{1}{T_2} \quad (12.24)$$

第三步，我们要把温度引入熵定义，从而在质量作用原理框架下研究热力学的熵。回到质量作用原理框架下的微观碰撞过程。一个物质粒子和一个时空子碰撞，物质粒子处在状态 a ，时空子处在状态 b 。碰撞之后，物质粒子的状态变成 c ，时空子状态变成了 d 。这个过程发生的概率是正比于 $n_a n_b$ ，即初始状态中有 n_a 个物质粒子处在状态 a ，有 n_b 个物质粒子处在状态 b 。然后我们考虑一个逆过程，其发生的概率正比于 $n_c n_d$ 。根据质量作用原理，时空子碰撞过程是时间反演不变，物质粒子要和时空子达到平衡态，即每个态上的平均粒子数不变。必须要求满足

$$n_a n_b = n_c n_d \quad (12.25)$$

结合碰撞过程的能量守恒

$$\epsilon_a + \epsilon_b = \epsilon_c + \epsilon_d \quad (12.26)$$

可证明存在这样的解

$$n_i = C e^{-\beta \epsilon_i} \quad (12.27)$$

其中, 常数 C 由

$$\sum_i n_i = N \quad (12.28)$$

来确定。根据概率论基本定义, 处在 i 态的概率为

$$p_i = \frac{n_i}{N} = \frac{1}{\sum_i e^{-\beta\epsilon_i}} e^{-\beta\epsilon_i} \quad (12.29)$$

这个 p_i 就是绝对零度概率分布在有限温度的推广。根据温度的定义, 可以证明系数 β 必须等于 $\frac{1}{T}$, 由此我们得到了有限温度的熵

$$S = - \sum_i p_i \log p_i \quad (12.30)$$

我们可以直接代入概率分布 p_i 的具体表达式, 得到热力学熵为

$$S = - \sum_i \frac{1}{\sum_i e^{-\beta\epsilon_i}} e^{-\beta\epsilon_i} \log \frac{1}{\sum_i e^{-\beta\epsilon_i}} e^{-\beta\epsilon_i} = \frac{E - F}{T} \quad (12.31)$$

这样就得到了热力学的普遍表达式, 其中热力学自由能为

$$F = -T \log \sum_i e^{-\epsilon_i/T} \quad (12.32)$$

内能为

$$E = \frac{1}{\sum_i e^{-\epsilon_i/T}} \sum_i \epsilon_i e^{-\epsilon_i/T} \quad (12.33)$$

在质量作用图景中, 非相对论自由物质粒子的能量由真实速度来表述

$$\epsilon = \frac{1}{2} m V^2 \quad (12.34)$$

代入可得有限温度下物质粒子的真实速度的分布函数

$$\Phi(V^2) = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mV^2}{2T}} \quad (12.35)$$

那么我们可以进一步给出三速度分解中经典统计速度的定义

$$v = \int V \Phi(V^2) d^3V = \sqrt{\frac{8T}{m\pi}} \quad (12.36)$$

由此我们对三速度分解的物理意义有了更深刻的认识。绝对零度下的熵对应着物质粒子的随机包络速度，而有限温度下的熵则包括了三个速度的贡献。从有限温度降到绝对零度，描述系统的物理量发生了根本变化。因此热力学无法定出绝对零度下的熵值，而在质量作用原理框架下则可以自然的得到。

12.4 绝对零度熵和热力学熵的比较

现代信息论的观点，熵（香农熵）是不确定性的量度。这个基本概念，和质量作用原理的大原则是契合的。通过对有限温度下物质粒子扩散系数的研究，说明在质量原理图景中，有限温度的热贡献的不确定度比绝对零度的量子贡献要小得多。

质量作用原理表明，物质粒子在时空子的随机碰撞下做布朗运动，此运动最重要的性质是

$$\langle X^2 \rangle = 2\mathfrak{R}t \quad (12.37)$$

其中 \mathfrak{R} 为时空扩散系数 $\mathfrak{R} = \frac{\hbar}{2m}$ 很显然，这是一个绝对零度下的结果，与温度无关，纯粹由普朗克常数导致。在经典物理的框架下，普朗克常数为 0，也就没有这个扩散系数，当然也就没有此种布朗运动，但仍然会有热运动导致的布朗运动。由此知道时空扩散系数有两部分，一部分与温度 T 无关是 \mathfrak{R} ，另一部分与温度 T 相关。

我们目标是物质粒子的熵增原理，也就是物质粒子的热力学性质。那么必须探讨在温度 T ，扩散系数是如何依赖于 T ？热运动导致的扩散系数，比普朗克常数导致的扩散系数，哪一个更加重要？

物质粒子在时空子的随机碰撞下做布朗运动，最重要的物理参数是两次碰撞之间的平均时间间隔 τ ，根据 3.4 节的估计对于电子

$$\tau \approx 10^{-20} \text{s} \quad (12.38)$$

量子力学中电子的时间尺度为 $\tau \approx 10^{-16}s$ ，如氢原子中的电子，远大于质量作用原理的时间尺度。

我们将把平均时间间隔 τ 显式的构造进入运动方程：

$$m \frac{dV}{dt} = -\frac{mV}{\tau} + F(t) \quad (12.39)$$

同时得到上面两个问题的答案，推导如下：

方程两边同时乘上距离 X ，利用

$$\frac{d(XV)}{dt} = V^2 + X \frac{dV}{dt} \quad (12.40)$$

得到

$$m \frac{d(XV)}{dt} = mV^2 - \frac{mXV}{\tau} + F(t)X \quad (12.41)$$

对方程两边取平均值。在温度 T 下，粒子的平均动能为

$$\frac{1}{2}m \langle V^2 \rangle = \frac{1}{2}kT \quad (12.42)$$

代入得到

$$m \frac{d(\langle XV \rangle)}{dt} = kT - m \frac{\langle XV \rangle}{\tau} \quad (12.43)$$

结合初始条件 $X(t=0) = 0$ ，解此微分方程得到

$$\langle XV \rangle = \frac{kT\tau}{m}(1 - e^{-t/\tau}) \quad (12.44)$$

利用

$$\langle XV \rangle = \frac{1}{2} \frac{d \langle X^2 \rangle}{dt} \quad (12.45)$$

代入再解一次微分方程得到

$$\langle X^2 \rangle = \frac{2kT\tau}{m}(t - \tau(1 - e^{-t/\tau})) \quad (12.46)$$

这个结果非常重要，因为同时具有我们想要的两个性质：

1. 在极短时间尺度下 $t \ll \tau$ ，可得

$$\langle X^2 \rangle = \frac{kT}{m}t^2 \quad (12.47)$$

表明在这个时间尺度下，粒子在做匀速直线运动，热运动贡献的速度为 $\sqrt{\frac{kT}{m}}$ 。

2. 更重要的是，在实验观察的时间尺度下 $t \gg \tau$ ，可得

$$\langle X^2 \rangle = \frac{2kT\tau}{m}t = 2\mathfrak{R}_T t \quad (12.48)$$

表明这个时间尺度下，粒子做的是扩散运动，对比 (12.37)，我们可以算出热运动导致的扩散，和绝对零度下的扩散的比值。假设系统处在室温 300K，比值为

$$\frac{\mathfrak{R}_T}{\mathfrak{R}} \approx 10^{-6} \quad (12.49)$$

由此知道，我们前文不考虑温度效应得到的结果是非常好的近似。物质粒子因为热运动导致的扩散效应可以忽略，基于质量作用原理计算得到绝对零度下的扩散系数非常准确。在质量作用原理的图景中，我们考虑粒子的量子行为时，有限温度下的熵可以忽略，正如在薛定谔方程中不需要和温度直接相关的项。

12.5 熵增原理的证明

质量作用原理图景中，我们利用熵定义在有限温度和绝对零度的表达式，结合马尔科夫过程的普遍性质，统一证明两种情况下的无相互作用粒子的熵增原理。

$$S = - \sum_i p_i \log p_i \quad (12.50)$$

直截了当，要证明熵增原理，即是要证明

$$\frac{dS}{dt} \geq 0 \quad (12.51)$$

利用概率的定义

$$\sum_i p_i = 1 \quad (12.52)$$

即有

$$\sum_i \frac{dp_i}{dt} = 0 \quad (12.53)$$

那么对熵定义的表达式求导可得

$$\frac{dS}{dt} = - \sum_i \left(\frac{dp_i}{dt} \log p_i + \frac{dp_i}{dt} \right) = - \sum_i \frac{dp_i}{dt} \log p_i \quad (12.54)$$

若等概率分布，所有 p_i 都相等为常数

$$p_i = \frac{1}{\Omega} \quad (12.55)$$

此时所要证的不等式取等号，这是一个很有用的约束，我们以下还会用到。时空子碰撞导致物质粒子不同状态之间的转移，是一个马尔可夫过程。对于马尔可夫过程，有以下的数学性质

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_j (p_j - p_i) g_{ij} \quad (12.56)$$

$$\frac{dp_j}{dt} = \sum_i (p_i - p_j) g_{ji} \quad (12.57)$$

前文 3.3.1 节已经用过这个性质，公式 (3.23) 即为这个数学性质的一个特例。如果等概率分布，括号内为零，概率不再发生变化。证明的重要一步，时空子的碰撞是时间反演不变的，要求转移矩阵 g 有

$$g_{ij} = g_{ji} \geq 0 \quad (12.58)$$

即是说，各个状态之间的转移，在时空子碰撞的时间尺度上是可逆的，这是因为物质粒子在时空中的布朗运动是无摩擦的。熵增原理的证明跟 p_i 的具体表达式无关，跟它是否包含温度 T 无关，这是马尔科夫过程的普适性质。由这个微观马尔科夫过程的可逆性却能推导出宏观时间尺度上熵的不可逆性，是要义所在。

结合这个数学性质，代入公式 (12.54)，得到

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{1}{2}\left(\sum_i \frac{dp_i}{dt} \log p_i + \sum_j \frac{dp_j}{dt} \log p_j\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\sum_{ij} (p_j - p_i)g_{ij} \log p_i + \sum_{ij} (p_i - p_j)g_{ji} \log p_j\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{ij} (p_j - p_i)g_{ij}(\log p_j - \log p_i)\end{aligned}\quad (12.59)$$

如果 $p_j \geq p_i$ ，则有 $\log p_j \geq \log p_i$ ，保证 $\frac{dS}{dt} \geq 0$ 。

如果 $p_j \leq p_i$ ，则有 $\log p_j \leq \log p_i$ ，同样保证 $\frac{dS}{dt} \geq 0$ 。

由此熵增原理得证。这一原理对于物理学及其他科学领域有深远意义，可作为不可逆性及时间流向的判据。但必须强调，这一原理在现代物理学中仍然为一条经验定律，无法从第一性原理出发得到解释。因此我们的结果有重要意义，时空子的随机碰撞能自然产生物质粒子熵增这一基本的物理原理。由此在质量作用原理下，统一了绝对零度下的熵和热力学的熵，证明了这两种熵都是随时间不减少的。

12.6 自然界为什么选择了布朗运动

在上节中我们普遍证明了熵增原理，现在让我们用布朗运动的性质直接定量计算出自由粒子的熵。由此可以看出，在质量作用原理图景中，熵到底是如何随着时间增加的。首先，我们把状态标记 i 取为粒子坐标 x ，那么粒子熵的定义可以写为

$$S = - \int dx p(x) \ln p(x) \quad (12.60)$$

利用自由粒子做布朗运动的数学性质，我们知道概率分布为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (12.61)$$

其中 μ 是自由粒子的初始位置（也可直接取为零，结果与初始位置无关），粒子坐标的方差为

$$\sigma^2 = 2Rt \quad (12.62)$$

其中 R 是我们的扩散系数为

$$R = \frac{h}{2m_{ST}} \quad (12.63)$$

利用以上概率分布的具体表达式，代入熵的定义，直接积分可以得到

$$S = \frac{1}{2}(1 + \ln(4\pi Rt)) \quad (12.64)$$

因为对数函数是个单调递增的函数，这样我们从定量上也得到了熵增的具体表达式。数学上讲，随机运动的形式有非常多种。即使在某一个时刻给定一个平均值和一个方差：

$$\int dx xp(x) = \mu \quad (12.65)$$

$$\int dx (x - \mu)^2 p(x) = \sigma^2 \quad (12.66)$$

仍然有无穷多种概率分布 $p(x)$ 的形式，每一种概率分布 $p(x)$ 对应一种随机运动，即有无穷多种随机运动的形式。为什么在质量作用框架下，时空子随机碰撞物质粒子，物质粒子会选择布朗运动这种形式呢？质量作用原理这个问题有一个很好的回答，答案是：当物质粒子选择布朗运动这种形式时，它的熵恰好是最大的，比选择任何其他概率分布 $p(x)$ 的熵都要大。证明如下：根据熵的定义，在平均值和方差两个来求 $p(x)$ 的函数形式，使得 S 取极大。这在数学上是一个变分问题（不是求在某一点上极大，而是求某一种函数使得极大），带两个约束，就是引入两个拉格朗日乘子 Λ_0 和 Λ

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln(p(x)) dx - \Lambda_0 \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \right) - \Lambda \left(\sigma^2 - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) (x - \mu)^2 dx \right) \quad (12.67)$$

令其变分为 0

$$\delta L = \int_{-\infty}^{\infty} \delta p(x) \left(\ln(p(x)) + 1 + \Lambda_0 + \Lambda(x - \mu)^2 \right) dx = 0 \quad (12.68)$$

解得

$$p(x) = e^{-\Lambda_0 - 1 - \Lambda(x-\mu)^2} \quad (12.69)$$

代入两个约束条件，定出两个拉格朗日乘子，就得到最终的结果

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (12.70)$$

这恰好是布朗运动的概率分布形式。证明完毕。代入熵的定义，得到

$$S = \frac{1}{2}(1 + \ln(2\pi\sigma^2)) \quad (12.71)$$

在任意的某一个时刻，选择这种特殊的随机运动方式，恰恰使得物质粒子的熵最大，最无序。我们可以明确的说，时空子随机碰撞物质粒子，物质粒子选择布朗运动这种形式不是偶然的。进一步的，随着时间的演化，

$$\sigma^2 = 2Rt \quad (12.72)$$

物质粒子的熵随时间单调的增大，直到时间到达系统的弛豫时间。此时系统达到了平衡态，也就是熵最大的状态，熵不再增加。

12.7 本章小结

熵是物理学中一个有根本重要性的概念，在物理学的多个领域有着重要应用。引入熵这个概念，因为熵有特殊的性质，其中最重要之处在于熵增定律。但必须注意到，熵增定律在目前整个物理学框架中，依然还是一条经验性的定律。即是说，这条定律是从现实世界的无数经验中归纳总结得到，实际上无法得到根本性的证明。从熵的数学定义可以看出，熵取决于各个状态的概率。因此，熵是对随机性运动的一种刻画。而目前整个物理学框架，并没有清楚地理解微观物质粒子随机性运动的根源。本文提出的质量作用原理，从根本上解释了物质粒子做随机运动的原因，即时空子的随机碰撞。在这个全新的图景中，我们超越了目前整个物理学框架，从而能够给出对熵增定律的证明。这一个关键性的证明，对熵概念极为重要，对本文的质量作用原理也同样重要。在质量作用原理框架下能够证明熵增定律，

这本身就是对质量作用原理强有力的支持。同时，在证明的过程中，我们发现了自然界选择让物质粒子做布朗运动的深层次原因。这一特殊形式的随机运动，有诸多奇妙的性质，不仅是构建量子力学的微观解释的基石，也是热力学第二定律的根源所在。

13 全文总结

从统计质量的根本概念革新出发，本文提出质量作用原理：物质粒子会受到时空中普遍存在的时空子的随机撞击而做无摩擦的布朗运动，每一次作用过程中物质粒子的作用量的改变都是 h 的整数倍。由此我们能够证明量子力学的所有重要结果。这个新框架的优势在于，并不需要引入额外的波函数假设，可以直接推导出薛定谔方程，特别是波包塌缩这样的概念在我们的质量作用原理框架下，也是无需引入的。而海森堡不确定性原理在质量作用原理的框架下也不再具备原理性的地位，它是质量作用原理一个非常自然的推论。从统计惯性质量和时空扩散系数之间的不确定关系，可以导出量子力学最基本的坐标动量不确定关系。因此证明波粒二相性在质量作用原理框架下是时空子撞击粒子而呈现出来的性质。我们把质量作用原理运用于量子测量问题，对困扰基本物理学近百年的 EPR 悖论难题，有了全新的突破性阐释。碰撞物质粒子的时空子，是无质量的零自旋标量粒子。根据质量作用原理，时空子的拓扑性质和动力学性质，可以解释光子的本性，由此自然得到了完整的电磁理论及电荷所有重要的性质。更为重要的是，我们得到的经典电磁理论在微观世界完全适用。结合微观世界最底层的布朗运动，经典电磁理论可以证明自由电子和原子核外电子的加速运动并不会导致电磁辐射，从而首次真正解决了原子稳定性问题。

从时空的涡旋结构，我们得到了费米子自旋的起源，还有费米子自旋和质量的共生关系。对于 3+1 维时空中描述基本电荷的电磁场，当追溯它的 2+1 维的涡旋起源时，我们证明带电轻子的代数有很强的约束，至多只能有三代。时空子对物质粒子的随机碰撞导致了物质粒子去毫无差错地执行一切量子力学公理，从而时空子充当了物质粒子一切微观行为的监督者

和牧者。质量作用原理也开创了量子力学完备性讨论和研究的基础。质量作用原理要求存在全新的无质量标量粒子，即时空子。考虑时空子对缪子的随机碰撞，恰恰是超越现有标准模型的关键一步。质量作用原理对标准模型的修正也是最小的，只需引入一个参数，即时空子和轻子的相互作用强度，就能够同时解释两个关键的缪子物理实验。经过对相应费曼图的详尽计算，时空子随机碰撞的贡献极好解释了缪子的反常磁矩及其寿命，彻底解决了 2021 年费米实验室最新实验中缪子反常磁矩和标准模型理论值不符合的世界性难题。最新的缪子反常磁矩实验结果，是对质量作用原理最精密的实验验证。不仅保证了质量作用原理的正确性，而且排除了其他代替理论存在的可能性。最后，从质量作用原理出发，我们在微观层面呈现出物质粒子的熵，并且在绝对零度下建立起熵的相应概念，统一了绝对零度下的熵和有限温度下的熵。进而证明了无相互作用粒子系统的热力学熵增原理。综上所述，质量作用原理是量子力学的起源，并且能够以最小的代价修正了现有的标准模型，为解释超越标准模型的物理现象如缪子反常磁矩，提供了全新的研究框架。

附录 A

布朗运动和马尔可夫过程

当物质粒子的位移 $X(t)$ 满足以下条件时，我们称物质粒子在做布朗运动：

1. $X(0)=0$.
2. 在任意有限的不相交的区间集合 $(s_i, s_i + t_i)$ 上，粒子走过的位移 $X(s_i + t_i) - X(s_i)$ 是相互独立的随机变量。
3. 对于每一个 $s \geq 0, t \geq 0, X(s + t) - X(s)$ 服从正态分布 $N(0, t)$.

对于每一个常数 a ，过程 $X(t) + a$ 称为从 a 开始的布朗运动。对于物理

上不受摩擦力的布朗运动，本论文中我们称为布朗运动。

考虑任意一个过去的时间集合 (\dots, p_2, p_1) ，任何“当前时间” s ，以及任何“未来时间” t ，同时所有这些时间全都在 X 的取值范围之内，若有

$$\dots < p_2 < p_1 < s \quad (13.1)$$

则马尔可夫性质成立，并且该过程为马尔可夫过程，但且仅当：

$$\begin{aligned} \Pr[X(t) = x(t) \mid X(s) = x(s), X(p_1) = x(p_1), X(p_2) = x(p_2), \dots] \\ = \Pr[X(t) = x(t) \mid X(s) = x(s)] \end{aligned} \quad (13.2)$$

对所有的时间集合成立。则可用条件概率计算得出

$$\Pr[X(t) = x(t) \mid X(s) = x(s), X(p_1) = x(p_1), X(p_2) = x(p_2), \dots] \quad (13.3)$$

这恰好就是所谓的未来的状态与任何历史的状态无关，仅与当前状态相关。

综上所述，本文研究的布朗运动是一个马尔可夫过程。

附录 B

随机变量分解

在朗之万方程中，粒子运动的真实速度 \vec{V} 包含有三个部分：经典统计速度 \vec{v} ，量子包络速度 \vec{u} 和高斯噪声 \vec{v}

不考虑经典统计速度的影响。那么粒子的随机运动将由量子包络运动和高斯噪声决定。我们需要证明的事实是：在严格的数学微分意义下可以区分子量子包络运动 \vec{u} 和高斯噪声 \vec{v} ，即量子包络运动对应于随机运动的光滑连续部分，而高斯噪声则对应于随机运动的连续不可微部分。

首先，对于任意的随机变量 $r(x, t)$ ，如果叠加上一个光滑函数 $f(x, t)$ ，得到的仍然是一个随机变量。即

$$w(x, t) = r(x, t) + f(x, t) \quad (13.4)$$

是一个随机变量。但是如果 $r(x, t)$ 或者 $w(x, t)$ 存在有限阶的自相关关联, 那么理论上可以严格区分 $w(x, t)$ 和 $r(x, t)$ 这两个随机变量。即:

$$\langle r(x_1, t_1)r(x_2, t_2)\cdots r(x_n, t_n) \rangle_r = \mathcal{F}_n(\vec{x}, \vec{t}), \quad \text{mod}(n, N) \equiv 0 \quad (13.5)$$

$$\langle r(x_1, t_1)r(x_2, t_2)\cdots r(x_n, t_n) \rangle_r = 0, \quad \text{mod}(n, N) \neq 0 \quad (13.6)$$

那么就有

$$\langle w(x_1, t_1)w(x_2, t_2)\cdots w(x_N, t_N)\cdots w(x_n, t_n) \rangle_r \neq 0, \quad n > N \quad (13.7)$$

因而可以数学上严格区分。在我们考虑的情形下, 高斯噪声 \vec{v} 存在二阶关联

$$\langle v_i(t)v_j(t') \rangle = \Omega\delta_{i,j}\delta(t-t') \quad (13.8)$$

而所有的奇数阶的关联都为零

$$\langle v(t) \rangle_v = 0$$

那么显然

$$\vec{w}(t) = \vec{u}(t) + \vec{v}(t)$$

的奇数阶关联并不为零。因此可以严格区分 $\vec{w}(t)$ 和 $\vec{v}(t)$ 。由于我们的质量作用原理框架下, 只存在一种高斯噪声, 不存在其他的噪声源。所以除了噪声之外的连续函数都是光滑可微的函数。因此 \vec{u} 是光滑的函数。

附录 C:

同时具有三速度分解的物理实例补充

化学中常见的轨道叠加, 化学键的形成, 都涉及到量子叠加态。以最简单的例子来构造, 氢原子的基态和第一激发态以等概率叠加为

$$\psi(r, t) = \psi_{100}e^{-iE_1t} + \psi_{200}e^{-iE_2t} \quad (13.9)$$

其中 $E_1 = -13.6\text{ev}$, $E_2 = -13.6/4\text{ev} = -3.4\text{ev}$, 氢原子的基态和第一激发态的波函数为

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \quad (13.10)$$

$$\psi_{200} = \frac{1}{\sqrt{2a^3}} e^{-r/2a} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) \quad (13.11)$$

其中 a 为玻耳半径 $a = 0.529 \times 10^{-10}m$ 。

利用欧拉公式, 我们可以把叠加波函数写为

$$\psi = [\psi_{100}\cos(E_1t) + \psi_{200}\cos(E_2t)] - i[[\psi_{100}\sin(E_1t) + \psi_{200}\sin(E_2t)]] \quad (13.12)$$

由此实部虚部可以进一步确定叠加波函数的两个势函数 R 和 I , 通过 (5.34) 和 (5.35) 求出此状态下电子的 u 和 v 都不为零。

此物理例子并不是特例, 具有普遍的物理意义。因为自然界中的量子态, 刚好有确定能量时候的态, 其经典统计速度 v 必然为零。一般的说, 粒子是处在能量本征态的叠加态之中, 其三个速度都不为零, 具有清晰的物理意义。

附录 D: 从质量作用原理到不确定关系

我们认为不确定性原理来自随机时空运动的运动学方程, 根源于运动路径的不可微, 即粒子坐标 $\vec{x}(t)$ 对时间的导数 $d\vec{x}/dt$ 不存在。因此必须注意的是, 不能定义粒子的动量 $\vec{p} = m d\vec{x}/dt$. 动量定义如下

$$\vec{p} = mD\vec{x} = m\vec{v} + m\vec{u} \quad (13.13)$$

有运动学方程

$$\vec{u} = \Re \frac{\nabla \rho}{\rho} \quad (13.14)$$

简单起见, 以下讨论全部用 x 方向的分量, 所有矢量方程成为分量的方程。对任何随机变量 O , 统计平均值为 $\langle O \rangle = \int O\rho(x)dx$ 。方程两边乘以 $m\rho$

并且对 x 积分，我们可以得到 $\langle p^+(t) \rangle = \langle p^-(t) \rangle$ 对方程两边乘以 mpx 并且对 x 积分，利用 $\langle p^+(t) \rangle = \langle p^-(t) \rangle$ ，

我们可以得到 x 和 u_x 协方差

$$\sigma(x, u_x) = \langle (x - \langle x \rangle)(u_x - \langle u_x \rangle) \rangle = -\mathfrak{K} \quad (13.15)$$

协方差表示的是两个变量的总体的误差，这与只表示一个变量误差的方差不同。如果两个变量的变化趋势一致，那么两个变量之间的协方差就是正值。如果两个变量的变化趋势相反，那么两个变量之间的协方差就是负值。

对任意两个实随机变量 A 和 B ，有施瓦茨不等式 $|\sigma(A, B)| \leq \sigma(A)\sigma(B)$ ，即可以得到

$$\sigma(x)\sigma(u_x) \geq \mathfrak{K} = \hbar/2m \quad (13.16)$$

其中统计定义不确定度为

$$\sigma(x) = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (13.17)$$

$$\sigma(u_x) = \sqrt{\langle u_x^2 \rangle - \langle u_x \rangle^2} \quad (13.18)$$

至此我们证明了随机时空运动粒子位置和涨落速度的不确定关系。进一步的，如果动量的不确定度有两部分的贡献

$$\sigma^2(p) = m^2(\sigma^2(v) + \sigma^2(u)) \quad (13.19)$$

即有 $\sigma(p) \geq m\sigma(u)$ ，代入位置和涨落速度的不确定关系，可以得到

$$\sigma(x)\sigma(p_x) \geq \hbar/2 \quad (13.20)$$

本文的证明把海森堡的不确定性原理诠释为随机时空运动粒子位置和涨落速度的不确定关系。时空中的随机时空运动因为没有摩擦力，没有时间上不可逆的耗散，涨落速度的不确定度完全来自于时空涨落。根据海森堡最初的表述，测量的动作不可避免的干扰了被测量粒子的运动状态，因此产生不确定性。同年稍后，厄尔·肯纳德 (Earl Kennard) 给出另一种表述。隔年，赫尔曼·外尔也独立获得这结果。按照肯纳德的表述，位置的不确定性

与动量的不确定性是粒子的秉性，无法同时压抑至低于某极限关系式，与测量的动作无关。这样，对于不确定性原理，有两种完全不同的表述。朗道认为这两种表述等价，可以从其中任意一种表述推导出另一种表述（参照朗道的量子力学）。然而最新的实验进展，日本学者在 2012 年 1 月 15 日发表反驳海森堡不确定性原理的实证结果。他们用两台仪器分别测量中子的自旋角度并计算后，得到了比海森堡不确定性原理所示误差更小的测量结果，此即证明海森堡不确定性原理所主张的测量极限是错误的。但是，不确定性原理仍旧正确无误，因为这是粒子内秉的量子性质。本文的推导过程与测量理论无关，也与粒子的内秉性质无关，而是认为不确定原理根源于时空的涨落。在非相对论的框架下面，时空涨落只与粒子的质量相关。粒子的质量是时空唯一可感知的粒子内秉性质。

附录 E

我们希望在附录证明以下结论：

定理 1. 给定任意拓扑激发态形变： $A : \Lambda_L \otimes \Lambda_R \mapsto \Lambda_L \otimes \Lambda_R$ ，其中 A 为自同构映射， Λ_L, Λ_R 分别表示左手旋量丛和右手旋量丛，则 A 为矢量映射。

证明：首先，由自旋结构的对称性，不难得知我们仅需证明任意自同构： $A : \Lambda_L \mapsto \Lambda_L$ 均为矢量映射即可得到结论。这是因为若可以确定这样的 A 为矢量映射，我们就可以通过共轭扩张得到： $\widetilde{A} : \Lambda_L \otimes \Lambda_R \mapsto \Lambda_L \otimes \Lambda_R$ 为矢量映射。

为了证明任意自同构： $A : \Lambda_L \mapsto \Lambda_L$ 为矢量映射，我们需要考虑左手旋量丛上的模，即它所对应的 *Clifford* 代数。由 [64] 中命题 1.3.2 可知，对有限形 *Clifford* 代数，均存在以下形式的同构：

$$Cl_{r,s} \cong Cl_1 \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} Cl_1 \widehat{\otimes} Cl_1^* \dots \widehat{\otimes} Cl_1^*.$$

其中， Cl_1 的个数对应 r ， Cl_1^* 的个数对应 s 。

再由 [64] 的定理 1.5.4 可知, 所有 *Clifford* 的 K -表示 ρ 都可以分解为以下形式的不可约代数表示的直和:

$$\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_m.$$

其中 ρ_i 对应的特征子空间 W_i 为最小子空间。

另外, 由 *Bott* 周期律定理 [64], 我们可以得到所有 Cl_m , ($m = 1, \dots, 8$) 的代数表示, 且该表示随着指标 m 以 8 为周期重复出现。此即: 我们可以得到任意 Cl_m 的代数表示如下:

$$\begin{aligned} Cl_1 &= \mathbf{C}, \quad Cl_2 = \mathbf{H}, \quad Cl_3 = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}, \quad Cl_4 = \mathbf{H}(2), \quad . \\ Cl_5 &= \mathbf{C}(4), \quad Cl_6 = \mathbf{R}(8), \quad Cl_7 = \mathbf{R}(8) \oplus \mathbf{R}(8), \quad Cl_8 = \mathbf{R}(16) \end{aligned} \quad (13.21)$$

而对上述形式的任意组合, 其直和分解部分 ρ_i 都可以拆分为直积形式:

$$Cl_{r,s} \cong Cl_1 \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} Cl_1 \widehat{\otimes} Cl_1^* \dots \widehat{\otimes} Cl_1^*.$$

上述直积形式任意部分之间的自同构映射, 均可以由 $Cl_1 = \mathbf{C}, \dots, Cl_8 = \mathbf{R}(16)$ 各个部分之间代数组合表示。由于上述部分都是矢量空间, 所以该自同构一定为矢量映射, 即 ρ_i 的自同构一定对应矩阵形式。

此外, 由上述代数分解过程, 不难得知所有对应不同子块之间同态映射也为矢量映射。最后, 我们将 ρ_i , $i = 1, \dots, 8$ 全部利用直和形式拼接起来, 就可以得到当 $i = 1, \dots, 8$ 时, 自同构 $A : \Lambda_L \mapsto \Lambda_L$ 为矢量映射。当指标 i 大于 8 时, 由 *Bott* 周期律, 我们仍然可以由上述过程得到自同构映射 A 为矢量映射。即: 此结论得证!

附录 F

我们考虑如下的费米子圈动量积分

$$\int \frac{d^d k}{D_1^{n_1} D_2^{n_2}} = i\pi^{d/2} (-p^2)^{d/2 - n_1 - n_2} G(n_1, n_2), \quad D_1 = -(k+p)^2, \quad D_2 = -k^2 \quad (13.22)$$

注意, 分母中的 D_1, D_2 实际上应还有一个无穷小解析延拓部分 $(-i0^+)$ 。但为了简单起见, 我们并不将它明显写出。解析延拓后, 我们需要考虑 $p^2 < 0$ 的贡献, 而 $-p^2$ 的次幂贡献可以从量纲分析简单得到。实际上, 现在需要计算的是无量纲的函数 $G(n_1, n_2)$; 为简化计算, 我们可以让 $-p^2 = 1$ 。当 $n_1 \leq 0$ 或者 $n_2 \leq 0$ 时, 积分可以严格计算, 并且可以得到 $G(n_1, n_2) = 0$ 。

利用维克转动以及 α 参数化的手段, 我们可以将 $G(n_1, n_2)$ 重写为:

$$G(n_1, n_2) = \frac{\pi^{-d/2}}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \int e^{-\alpha_1(k+p)^2 - \alpha_2 k^2} \alpha_1^{n_1-1} \alpha_2^{n_2-1} d\alpha_1 d\alpha_2 d^d k. \quad (13.23)$$

对指数上的部分做配分操作, 让

$$k' = k + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} p,$$

我们可以得到

$$\begin{aligned} G(n_1, n_2) &= \frac{\pi^{-d/2}}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \int \exp\left[-\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right] \alpha_1^{n_1-1} \alpha_2^{n_2-1} d\alpha_1 d\alpha_2 \int e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)k'^2} d^d k \\ &= \frac{1}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \int \exp\left[-\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right] (\alpha_1 + \alpha_2)^{-d/2} \alpha_1^{n_1-1} \alpha_2^{n_2-1} d\alpha_1 d\alpha_2. \end{aligned} \quad (13.24)$$

利用代换 $\alpha_1 = \eta x$, $\alpha_2 = \eta(1-x)$, 上式可以改写为

$$\begin{aligned} G(n_1, n_2) &= \frac{1}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \int_0^1 x^{n_1-1} (1-x)^{n_2-1} dx \int_0^\infty e^{-\eta x(1-x)} \eta^{-d/2+n_1+n_2-1} d\eta \\ &= \frac{\Gamma(-d/2 + n_1 + n_2)}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \int_0^1 x^{d/2-n_2-1} (1-x)^{d/2-n_1-1} dx. \end{aligned} \quad (13.25)$$

被积函数是一个欧拉 B 函数, 因此我们可以得到最终的结果

$$G(n_1, n_2) = \frac{\Gamma(-d/2 + n_1 + n_2)\Gamma(d/2 - n_1)\Gamma(d/2 - n_2)}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)\Gamma(d - n_1 - n_2)}. \quad (13.26)$$

对所有的正整数 $n_{1,2}$ 这些积分都正比于

$$G_1 = G(1, 1) = -\frac{2g_1}{(d-3)(d-4)}, \quad g_1 = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)}, \quad (13.27)$$

比例系数是 d 的有理函数。

注意在 $k \rightarrow \infty$ 处, (13.22) 的分母部分的行为是 $(k^2)^{n_1+n_2}$ 。因此, 这个积分在 $d \geq 2(n_1 + n_2)$ 时是发散的。

致谢

特别感谢余小鲁博士, 何亚丽博士和吴剑锋博士的耐心讨论和批判性的建议。另外, 宋飞博士对于本文的附录 E 部分的证明有重要贡献。在本研究项目的开始阶段, 张鹏博士, 马明伟博士, 刘金岩博士, 田源博士, 崔莹, 和胡晓辉也参与了讨论, 提出了很多有意义的建议, 在此一并致谢。

作者信息

此工作由作者在超天才理论物理研究所 (作者任研究所主任) 完成。作者的邮箱为: CJ_GU@grandgeniusgroup.com.

参考文献

- [1] L. Erdos, Lecture Notes on Quantum Brownian Motion, arXiv: 1009.0843, (2010)
- [2] N. Wiener, Differential space. J. Math and Phys. 58 , 131-174 (1923)
- [3] J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena (4-th edition), Oxford University, (2002)
- [4] S. Ross, A First Course in Probability (8th Edition), Pearson Prentice Hall, (2009)
- [5] F. Reif, Fundamentals of Statistical and Thermal Physics, Waveland, (2009)

- [6] A. Einstein, Investigations on the theory of the brownian movement. Dover Edition(1956).
- [7] E. Nelson, Dynamical theories of Brownian motion, (Princeton University Press, Princeton, 1967).
- [8] E. Nelson, Quantum Fluctuations, (Princeton University Press, Princeton, 1985).
- [9] S. Weinberg, Cosmology, Oxford University, (2008)
- [10] F. W. Stecker “Constraining Superluminal Electron and Neutrino Velocities using the 2010 Crab Nebula Flare and the IceCube Pev Neutrino Events”. *Astroparticle Physics* 56: 16?C18. arXiv:1306.6095
- [11] K. Kodama et al. (DONUT Collaboration; Kodama; Ushida; Andreopoulos; Saoulidou; Tzanakos; Yager; Baller; Boehnlein; Freeman; Lundberg; Morfin; Rameika; Yun; Song; Yoon; Chung; Berghaus; Kubantsev; Reay; Sidwell; Stanton; Yoshida; Aoki; Hara; Rhee; Ciampa; Erickson; Graham; et al. (2001). “Observation of tau neutrino interactions”. *Physics Letters B* 504 (3): 218. arXiv:hep-ex/0012035.
- [12] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* 98, 030001 (2018) and 2019 update
- [13] Adams, Scott; et, al (2013). "Observing the Next Galactic Supernova". *Astrophysical Journal*. 778 (2): 164.
- [14] R. A. Battye and A. Moss, “Evidence for Massive Neutrinos from Cosmic Microwave Background and Lensing Observations”. *Physical Review Letters* 112 (5): 051303 (2014). arXiv:1308.5870v2.
- [15] Planck Collaboration, P. A. R.; Ade, P. A. R.; Aghanim, N.; Armitage-Caplan, C.; Arnaud, M.; Ashdown, M.; Atrio-Barandela, F.; Aumont,

- J.; Baccigalupi, C.; Banday, A. J.; Barreiro, R. B.; Bartlett, J. G.; Battaner, E.; Benabed, K.; Benot, A.; Benoit-L'vy, A.; Bernard, J.-P.; Bersanelli, M.; Bielewicz, P.; Bobin, J.; Bock, J. J.; Bonaldi, A.; Bond, J. R.; Borrill, J.; Bouchet, F. R.; Bridges, M.; Bucher, M.; Burigana, C.; Butler, R. C.; et al. (2013). "Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters". *Astronomy & Astrophysics* 1303: 5076. arXiv:1303.5076. Bibcode:2013arXiv1303.5076P. doi:10.1051/0004-6361/201321591.
- [16] S. Weinberg, *Lectures on Quantum Mechanics*, Cambridge University, (2012)
- [17] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol 2, Cambridge University, (1995)
- [18] S. Chandrashekhar, *Rev. Mod. Phys.*, 15,1(1943).
- [19] J. Doob, *Stochastic processes*. Wiley: New York, (1953).
- [20] Wold, H. (1954) *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, Second revised edition, with an Appendix on "Recent Developments in Time Series Analysis" by Peter Whittle. Almqvist and Wiksell Book Co., Uppsala.
- [21] G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein, *Rev. Mod. Phys.*, 36,823(1930)
- [22] M. C. Wang and G. E Uhlenbeck, *Rev. Mod. Phys.*, 17,323(1945).
- [23] L. de Broglie, *C.R. Acad. Sci.* 264B, 1041 (1967).
- [24] M. Davidson, *Lett. Math. Phys.* 3, 271 (1979).
- [25] M. Davidson, *Lett. Math. Phys.* 3, 367 (1979)

- [26] Max Born, Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge, *Zeitschrift für Physik*, 37, #12 (Dec. 1926), pp. 863-C867 (German); English translation, On the quantum mechanics of collisions, in *Quantum theory and measurement*, section I.2, J. A. Wheeler and W. H. Zurek, eds., Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1983, ISBN 0-691-08316-9.
- [27] L. Kadanoff, *Statistical Physics: statics, dynamics and renormalization*. World Scientific Press, (2000).
- [28] L. Landau and E. Lifshitz, *Courses in theoretical physics, vol 1, Mechanics*. Butterworth-Heinemann. (1976)
- [29] H. Goldstein, *Classical Mechanics (3rd Edition)*, Addison-Wesley, (2001)
- [30] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics (3-rd Edition)*, Wiley, (1998)
- [31] L. Landau and E. Lifshitz, *Courses in theoretical physics, vol 3, Quantum Mechanics*. Pergamon Press, (1977)
- [32] R.J. Glauber, *Quantum optics and electronics*, edited by C. De Witt (Gordon-Breach New York, 1965); H. Haken, in *Encyclopedia of Physics* (Springer, New York, 1976).
- [33] G. Birkhoff and J. von Neumann, *Ann. Math.* 37, 823 (1932).
- [34] H. Haken and W. Weidlich, *Z. Phys.* 205, 96 (1967).
- [35] E. H. Kennard, “Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen”. *Zeitschrift für Physik* 44 (4-C5): 326 (1927)
- [36] T.D.Lee, *Particle physics and introduction to field theory*, Harwood Academic Publishers, 1981.
- [37] Einstein, A; B Podolsky; N Rosen. *Physical Review*. 47 (10): 777-780.

- [38] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover Edition, (1950)
- [39] L. A. Rozema, A. Darabi, D. H. Mahler, A. Hayat, Y. Soudagar, and A. M. Steinberg, *Phys. Rev. Lett.* 109, 100404 (2012)
- [40] L. A. Rozema, A. Darabi, D. H. Mahler, A. Hayat, Y. Soudagar, and A. M. Steinberg, *Phys. Rev. Lett.* 109, 189902 (2012)
- [41] R. P. Feynman, Ph.D thesis. Princeton Press (1942).
- [42] P.A.M. Dirac, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, Band 3, Heft 1 , pp. 64-72 (1933)
- [43] P. Blanchard, S. Golin and M. Serva, *Phys. Rev.* D34, 3732 (1986).
- [44] P. Blanchard and M. Serva, *Phys. Rev.* D51, 3132 (1995).
- [45] P. A. M. Dirac, *Quantised Singularities in the Electromagnetic Field*, *Proc. Roy. Soc. A* 133, 60 (1931)
- [46] Jackiw R , Weinberg S . *Weak-Interaction Corrections to the Muon Magnetic Moment and to Muonic-Atom Energy Levels.* *Phys. Rev. D.* 5, 2396 (1972).
- [47] G. Bennett et al. (Muon g-2 Collaboration), *Final Report of the Muon E821 Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL*, *Phys.Rev.* D73, 072003 (2006).
- [48] B. Abi, et al. *Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm*, *Phys. Rev. Lett.* 126 (14) (2021) 141801.
- [49] P.A. Zyla et al. (Particle Data Group), *Prog. Theor. Exp. Phys.* 2020 , 083C01 (2020) and 2021 update.

- [50] S. Eidelman, M. Giacomini, F.V. Ignatov, M. Passera, The τ lepton anomalous magnetic moment, Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, Volume 169, 2007, Pages 226-231, ISSN 0920-5632, <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysbps.2007.03.002>. (<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920563207002496>)
- [51] Keshavarzi, Alex & Khaw, Kim Siang & Yoshioka, Tamaki. (2021). Muon $g-2$: current status.
- [52] Aoyama, Tatsumi, et al. “Revised and Improved Value of the QED Tenth-Order Electron Anomalous Magnetic Moment.” Physical Review D, vol. 97, no. 3, Feb. 2018. Crossref, <https://doi.org/10.1103/physrevd.97.036001>.
- [53] R. H. Parker, C. Yu, W. Zhong, B. Estey, H. Müller, Measurement of the fine-structure constant as a test of the Standard Model, Science 360 (2018) 191.
- [54] V. A. Smirnov, Feynman Integral Calculus, (Springer Verlag, Berlin, 2006) DOI: <https://doi.org/10.1007/3-540-30611-0>.
- [55] I. Dubovyka , J. Gluza and T. Riemann, Optimizing the Mellin-Barnes Approach to Numerical Multiloop Calculations. Acta Physica Polonica B, Vol. 50 (2019), 11, 1993.
- [56] AMBRE webpage: <http://prac.us.edu.pl/~gluza/ambre>.
- [57] J. Gluza, K. Kajda, T. Riemann, AMBRE - a Mathematica package for the construction of Mellin-Barnes representations for Feynman integrals, Comput. Phys. Commun. 177 (2007) 879–893. arXiv:0704.2423, doi: 10.1016/j.cpc.2007.07.001.

- [58] A. Smirnov, V. Smirnov, On the Resolution of Singularities of Multiple Mellin-Barnes Integrals, *Eur. Phys. J. C* 62 (2009) 445–449. arXiv:0901.0386, doi:10.1140/epjc/s10052-009-1039-6.
- [59] G. 't Hooft and F. Bruckmann, Monopoles, Instantons and Confinement. arXiv:hep-th/0010225
- [60] N. K. Nielsen and P. Olesen, Vortex-Line Models for Dual Strings, *Nucl. Phys. B* 61, 45 (1973)
- [61] L. Mario. Hydrodynamic theory of electromagnetic fields in continuous media. *Physical Review Letters* 70.23(1993):3580-3583.
- [62] Martin, T.. (1976). Torsion and the geometry of spin.
- [63] Martins, Alexandre A , Pinheiro, et al. Fluidic electrodynamics: Approach to electromagnetic propulsion[C] *Aip Conf Proc. American Institute of Physics*, 2009.
- [64] H. B. Lawson. *Spin Geometry* [M]. Princeton University Press, New Jersey, 1994.
- [65] Kauffman L H . Braiding and Majorana Fermions[J]. *Journal of Knot Theory & Its Ramifications*, 2017, 26(9).
- [66] Kauffman L H . Braiding, Majorana Fermions and the Dirac Equation[J]. *Journal of Physics Conference*, 2018, 1051:012036-.
- [67] CDF COLLABORATION, High-precision measurement of the W boson mass with the CDF II detector, *SCIENCE*, 376,(2022) 170